DS 1 (3 heures): Corrigé

La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les exercices, problèmes sont indépendants. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés. Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler une erreur d'énoncé, vous êtes prié de le signaler sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous prendriez.

Calculatrices autorisées.

Les exercices sont de difficulté croissante. Le premier d'entr'eux est OBLIGATOIRE. Toute réponse mitigée à cet exercice influera sur le jugement général de votre copie.

Exercice 1 (Cours ou presque et questions indépendantes)
a) Préciser ce qu'on entend par somme partielle, somme et reste d'une série, ce dans un contexte pertinent.
b) Donner un exemple de série convergente et un exemple de série divergente non grossièrement.
c) On suppose que, pour n assez grand, on a $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$. Peut-on déterminer la nature de la série $\sum u_n$ à partir de cette seule information ?
d) On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = arctan(\dfrac{1}{n^2+n+1})$. En donnant un équivalent simple à u_n, préciser la nature de série $\sum u_n$.
Solution : b) La série harmonique. c) Non. d) La série considérée converge puisque son TG est équivalent à $\dfrac{1}{n^2}$ et le PCSTP (principe de comparaison pour les STP) s'applique.

Exercice 2 (Etude d'une série)
Pour $n \geq 2$ on définit $u_n = \ln(n+1) - 2\ln(n) + \ln(n-1)$.
a) Vérifier que $u_n = -\dfrac{1}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$ si $n \to +\infty$.
b) Quelle est la la nature de série $\sum u_n$?
c) En simplifiant les sommes partielles de cette série, donner la valeur de sa somme.
d) On note, pour $n \geq 2$, R_n le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$. Donner un équivalent simple de R_n lorsque $n \to +\infty$. La série $\sum R_n$ converge-t-elle ?
Solution : a) Pour n assez grand : $u_n = \ln(1+1/n)+\ln(1-1/n) = 1/n-1/2n^2-1/n-1/2n^2+o(1/n^2)$. Ce qui donne le résultat. b) PCSTP donne alors la convergence de la série $\sum -u_n$ donc de notre série. c) Pour $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$; il vient aussi $S_n = \sum_{k=2}^{n}((\ln(k+1)-\ln(k))-(\ln(k)-\ln(k-1))) = \ln(1+1/n)-\ln 2$, ce par télescopage. En passant à la limite sur n, on récupère que $\sum_{n=2}^{\infty} u_n = -\ln 2$ d) En revenant à la définition du reste et conformément aux notations habituelles, on obtient $R_n = -\ln(1+1/n) \sim -1/n$; ce qui montre la divergence de la série en question.

Exercice 3 (Une série B)
Dans ce qui suit α, β sont des réels sur lesquels on pourra émettre des conditions et n un entier supérieur ou égal à 2.
On pose alors $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.
Il s'agit d'étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$.

1) Préciser cette nature si $\alpha \leq 1$ et $\beta \leq 0$. (Comparer à une série de Riemann).

2) Même question si $\alpha > 1$ et $\beta \geq 0$. (Idem)

3) On suppose dans cette question que $\alpha < 1$ et $\beta > 0$.

Quelle est la limite pour $n \to +\infty$ de $n^{\frac{1+\alpha}{2}} u_n$?

En déduire que $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.

4) En s'inspirant de la démarche précédente, prouver que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge si $\alpha > 1$ et $\beta < 0$.

On définit maintenant, pour $x > 1$ et $\beta > 0$: $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta}$.

5) Etude sommaire et allure du graphe de cette fonction.

6) En utilisant des considérations d'aire (cf cours) vérifier que, k étant un entier :

$$\forall k \geq 2,\ f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \text{ et } \forall k \geq 3,\ f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx.$$

Pour $\alpha = 1,\ \beta > 0, n \geq 2$, on pose : $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$.

7) En déduire que $\int_2^{n+1} f(x)dx \leq S_n \leq f(2) + \int_2^n f(x)dx$, ce pour tout $n \geq 2$.

8) Expliciter une primitive simple de f sur son intervalle de définition.

9) Prouver alors que $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge pour $\alpha = 1,\ \beta \leq 1$ et donner un équivalent de S_n pour $n \to +\infty$.

10) Faire une synthèse générale.

Solution : 1) Pour $n \geq 3, u_n \geq \dfrac{1}{n^\alpha}$, comme $\alpha \leq 1$, PCSTP, $\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$

2) Pour $n \geq 3, u_n \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$, comme $\alpha > 1$, PCSTP, $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

3) Pour $n \geq 2, n^{\frac{1+\alpha}{2}} u_n = \dfrac{n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\ln n)^\beta} \to +\infty$, par croissance comparée car $\dfrac{1-\alpha}{2} > 0$; comme $\dfrac{1+\alpha}{2} < 1$, la règle n^γ permet alors de conclure à la $\underline{\text{divergence de } \sum u_n}$.

4) Cette fois : $n^{\frac{1+\alpha}{2}} u_n = \dfrac{(\ln n)^{-\beta}}{n^{\frac{\alpha-1}{2}}} \to 0$ car $\dfrac{\alpha-1}{2} > 0$; $\dfrac{1+\alpha}{2} > 1$,la règle n^γ donne la $\underline{\text{convergence de } \sum u_n}$.

5) $\underline{\text{La fonction est positive,continue, décroissante de } +\infty \text{ à } 0.}$

6) Cf cours pour la preuve de la règle de Riemann.

7) Avec la première inégalité de 6) et en sommant pour $2 \leq k \leq n$, il vient $S_n \geq \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f \overset{Chasles}{=} \int_2^{n+1} f$.

De même en sommant la seconde pour $3 \leq k \leq n$, il vient $S_n \leq f(2) + \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f = f(2) + \int_2^n f$.

8) f étant continue sur son intervalle de définition, elle y possède une primitive, en observant que $f = u'(u^{-\beta})$, où $u = \ln$, il vient qu'une $\boxed{\text{telle primitive est, pour } \beta \neq 1, \dfrac{1}{1-\beta}(\ln)^{1-\beta} \text{ et } \ln(\ln) \text{ pour } \beta = 1.}$

9) Prenons d'abord $0 < \beta < 1$ alors, par l'encadrement de 7) et avec 8), nous obtenons :
$\forall n \geq 2, \dfrac{1}{1-\beta}((\ln(n+1))^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}) \leq S_n \leq f(2) + \dfrac{1}{1-\beta}((\ln n)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta})$.

$1 - \beta > 0$ entraîne que $\dfrac{1}{1-\beta}((\ln(n+1))^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}) \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$ et (S_n) aura le même comportement.

Autrement dit $\boxed{\sum u_n \text{ diverge pour } \alpha = 1 \text{ et } \beta \in]0,1[\,.}$

Par ailleurs on voit aisément qu'un équivalent des encadrants et donc de S_n est $\boxed{\dfrac{1}{1-\beta}(\ln n)^{1-\beta}}$.

Si $\beta = 1$ l'encadrement devient : $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq S_n \leq \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + f(2)$.

Ainsi $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(\ln n)$, ce qui montre aussi que (S_n) diverge vers $+\infty$ et que $\underline{\sum u_n \text{ diverge.}}$
10) Pour balayer tous les cas, il nous reste à examiner le cas $\alpha = 1, \beta > 1$.
La majoration du 7) donne ici $S_n \leq f(2) + \dfrac{1}{\beta - 1}((\ln 2)^{1-\beta} - (\ln n)^{1-\beta}) \leq f(2) + \dfrac{1}{\beta - 1}((\ln 2)^{1-\beta})$,la suite (S_n) est majorée et notre STP $\underline{\sum u_n \text{ converge.}}$

En conclusion $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge ssi $\begin{cases} \alpha > 1 \ \boxed{\text{ou}} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$.

Exercice 4 (Un système dynamique discret)
On définit la suite (u_n) par le réel u_0 et la relation de récurrence suivante (valable pour tout entier naturel n et notée (1)) :

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

1) Etablir que cette suite est décroissante.
2) En utilisant (1) et en supposant que (u_n) converge, montrer que la limite de (u_n) est nécessairement nulle.
3) Préciser le comportement de (u_n) si $u_0 < 0$ puis si $u_0 > 1$.
4) Faire de même si u_0 vaut 0 ou 1.
On suppose désormais que $u_0 \in I =]0, 1[$.
5) Vérifier que $u_n \in I$ pour tout n.
6) Prouver que (u_n) converge vers 0.
7) En citant un résultat du cours (de seconde année) justifier que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^2$ converge. Quelle en est la somme?
On se propose de déterminer un équivalent de u_n pour $n \to +\infty$.
On pourra utiliser librement le résultat suivant (théorème de Cesaro) :
Si (v_n) est une suite convergeant vers L alors la suite $(\dfrac{\sum_{k=0}^n v_k}{n+1})$ converge aussi vers L.
Pour tout n on pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.
8) Montrer que (v_n) converge vers 1.
9) En déduire un équivalent de u_n pour $n \to +\infty$.
10) Pour quelles valeurs du réel α la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^\alpha$ converge-t-elle?

Solution : 1) Evident avec (1).
2) En notant L la limite de cette suite et en passant à la limite dans (1), il vient $L = L - L^2$ soit $L = 0$
3) Si $u_0 < 0$ la suite étant décroissante, elle ne peut converger vers 0 donc, en vertu de 2), elle diverge vers $-\infty$. Si $u_0 > 1$ alors $u_1 < 0$ et on est ramené au contexte précédent.
4) Dans ces cas la suite stationne sur 0 donc converge vers 0.
5) Simple récurrence.
6) La question précédente assure que la suite est minorée (par 0), elle est de plus décroissante donc convergente et sa limite (cf 2)) est nécessairement 0.
7) Puisque la suite (u_n) converge, le lien suite-série implique la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0}(u_{n+1} - u_n)$ donc celle de (en vertu de la relation (1)) de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^2$.
8) Après réduction au même dénominateur avec (1) : $v_n = \dfrac{1}{1 - u_n} \to 1$ puisque $u_n \to 0$ si $n \to \infty$.
9) Le théorème de Cesaro appliqué à la suite (v_n) donne $\dfrac{1/u_{n+1} - 1/u_0}{n+1} \to 1$ donc que $\dfrac{n+1}{u_{n+1}} \to 1$, ce qui montre que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.
10) PCSTP, il y a convergence ssi $\alpha > 1$.

Exercice 5 (Série harmonique perturbée)
Pour tout entier naturel non nul, on pose $u_n = \dfrac{1}{n}$ si l'écriture décimale de n ne comporte aucun 9 sinon on pose $u_n = 0$. Par exemple $u_{377} = \dfrac{1}{377}$ et $u_{1789} = 0$.

Enfin on définit $Sm = \sum_{n=10^m}^{10^{m+1}-1} u_n$ pour tout entier naturel m.

1) Prouver que $S_m \leq \dfrac{9^{m+1}}{10^m}$, ce pour tout m.

2) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$?

Solution : 1) Si $10^m \leq n \leq 10^{m+1} - 1$, $u_n \leq \dfrac{1}{10^m}$ mais le nombre de tels entiers n qui n'admettent pas 9 dans leur écriture décimale (elle comporte m+1 chiffres) est de 9^{m+1} d'où la majoration.

2) Notre série étant à termes positifs, sa convergence sera assurée dès qu'une suite extraite de la suite de ses sommes partielles sera majorée.

Or, pour tout entier N, $\sum_{n=1}^{10^{N+1}-1} u_n = \sum_{m=0}^{N} (\sum_{n=10^m}^{10^{m+1}-1} u_n)$,

donc $\sum_{n=1}^{10^{N+1}-1} u_n \leq \sum_{m=0}^{N} \dfrac{9^{m+1}}{10^m} \leq \dfrac{9}{1-9/10} = 90$.

La série converge .