Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 18.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 90$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$.
   On précisera la valeur de v_0.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 90 - 25 \times 0,8^n.$$

3. La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de 52 € par mois qui permet de recevoir chaque semaine ce panier bio.
   En juillet 2024, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement.
   Les responsables de la société Biocagette font les hypothèses suivantes :
   - d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés ;
   - chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.

   (a) Justifier que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017.
   (b) Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4 420 € durant l'année 2025 ? Justifier la réponse.
   (c) Selon ce modèle, vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société Biocagette ?
   Argumenter la réponse.

Exercice 2

Une société propose des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Le directeur de cette société remarque que, chaque année, 14 % des contrats supplémentaires sont souscrits et 7 sont résiliés.

En 2017, l'entreprise dénombrait 120 contrats souscrits.

On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n est le nombre de contrats souscrits l'année $2017 + n$.

Ainsi on a $u_0 = 120$.

1. (a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1,14u_n - 7$.
   (b) Estimer le nombre de contrats d'entretien en 2018.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 50$ pour tout entier naturel n.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n puis démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 70 \times 1,14^n + 50.$$

   (c) En utilisant la calculatrice, résoudre l'inéquation $u_n > 190$.

Exercice 3

Des algues prolifèrent dans un étang. Pour s'en débarrasser, le propriétaire installe un système de filtration.

En journée, la masse d'algues augmente de 2 %, puis à la nuit tombée, le propriétaire actionne pendant une heure le système de filtration qui retire 100 kg d'algues. On admet que les algues ne prolifèrent pas la nuit.

Le propriétaire estime que la masse d'algues dans l'étang au matin de l'installation du système de filtration est de 2 000 kg.

On modélise par a_n la masse d'algues dans l'étang, exprimée en kg, après utilisation du système de filtration pendant n jours ; ainsi, $a_0 = 2000$. On admet que cette modélisation demeure valable tant que a_n reste positif.

1. Vérifier par le calcul que la masse a_2 d'algues après deux jours de fonctionnement du système de filtration est de 1 878,8 kg.
2. On affirme que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 1,02a_n - 100$.
   (a) Justifier à l'aide de l'énoncé la relation précédente.
   (b) On considère la suite (b_n) définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$b_n = a_n - 5000.$$

   Démontrer que la suite (b_n) est géométrique. Préciser son premier terme b_0 et sa raison.
   (c) En déduire pour tout entier naturel n, une expression de b_n en fonction de n, puis montrer que $a_n = 5000 - 3000 \times 1,02^n$.