Feuille d'exercices 2
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 2.

(e) L'équation (E) est définie sur $D = [1, +\infty[$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in D, \quad (E) & \Leftrightarrow & (x+1)+(x-1)+2\sqrt{x^2-1} < 3x+1 \\ & \Leftrightarrow & 2\sqrt{x^2-1} < x+1 \\ & \Leftrightarrow & 2\sqrt{x-1} < \sqrt{x+1} \\ & \Leftrightarrow & 4(x-1) < x+1 \\ & \Leftrightarrow & x < \dfrac{5}{3} \end{array}$$

donc l'ensemble des solutions de (E) est $\left[1, \dfrac{5}{3}\right[$.

(f) L'équation (E) est définie sur $D = \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in D, \quad (E) & \Leftrightarrow & \sqrt{\left(\sqrt{x}-2\right)^2} \geq 3 \\ & \Leftrightarrow & \left|\sqrt{x}-2\right| \geq 3. \end{array}$$

Par disjonction de cas :
- $\forall x \in [1, 4],\ (E) \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq -1$, ce qui est impossible,
- $\forall x \in [4, +\infty[,\ (E) \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 25$,

donc l'ensemble des solutions de (E) est $[25, +\infty[$.

Exercice 5. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (a+bx)^2+(c+dx)^2 \geq 0$, donc le discriminant Δ du trinôme $f(x)$ est négatif. Or :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (b^2+d^2)x^2 + 2(ab+cd)x + (a^2+c^2),$$

donc : $\Delta = 4(ab+cd)^2 - (a^2+c^2)(b^2+d^2)$. Donc $(ab+cd)^2 \leq (a^2+c^2)(b^2+d^2)$, donc $|ab+cd| \leq \sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}$.

Exercice 8.

(c)
- Si n est impair, on pose $n = 2p+1$:
$$\sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^k(2k+1) = 1-3+5-7+\cdots+(4p+1)-(4p+3) = -2(p+1) = -n-1,$$
- Si n est pair, on pose $n = 2p$:
$$\sum_{k=0}^{2p}(-1)^k(2k+1) = 1-3+5-7+\cdots-(4p-1)+(4p+1) = -2p+(4p+1) = 2p+1 = n+1,$$

Dans tous les cas, on a donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1) = (-1)^n(n+1)$.

(d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1} = \frac{5}{1}\frac{7}{3}\frac{9}{5}\cdots\frac{2n-1}{2n-5}\frac{2n+1}{2n-3}\frac{2n+3}{2n-1} = \frac{(2n+1)(2n+3)}{3}$.

Exercice 12.

(e) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} \min(i,j) = 2\sum_{0\leq i\leq j\leq n} i - \sum_{0\leq i=j\leq n} i = 2\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} i - \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{j=0}^{n} j(j+1) - j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(f) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} |i-j| = 2\sum_{0\leq i\leq j\leq n}(j-i) = 2\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}(j-i) = \sum_{j=0}^{n} j(j+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Exercice 14.

(a) On a : $\displaystyle 2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \geq \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$,

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$: $\displaystyle (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \geq \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 = 1+nx$.

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$(1+\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{2}^k = \sum_{0\leq 2p\leq n}^{n}\binom{n}{2p}2^p + \sum_{0\leq 2p+1\leq n}^{n}\binom{n}{2p+1}2^p\sqrt{2},$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n = \sum_{0\leq 2p\leq n}^{n}\binom{n}{2p}2^p \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{0\leq 2p+1\leq n}^{n}\binom{n}{2p+1}2^p.$$

On peut vérifier que les suites (a_n) et (b_n) sont caractérisées par :

$$a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ \text{et : } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n + 2b_n,\ b_{n+1} = a_n + b_n.$$