

## Devoir surveillé n° 1

### CORRIGÉ

#### Exercice 1.

1. (a) On raisonne par récurrence double :  $u_0$  et  $u_1$  sont des entiers. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $u_n$  et  $u_{n+1}$  sont des entiers. Alors, comme  $u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$ ,  $u_{n+2}$  est encore un entier.  
Par récurrence double, tous les termes de la suite  $(u_n)$  sont donc des entiers.
- (b) On raisonne cette fois par récurrence simple.  
Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(n)$  l'assertion «  $u_{n+1} \geq 3u_n$  ».  
On a  $u_1 = 1$  et  $3u_0 = 0$ , donc  $u_1 \geq 3u_0$ . Donc  $P(0)$  est vraie.  
Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $P(n)$  vraie. On a alors  $u_{n+1} \geq 3u_n$ , donc  $-u_n \geq -\frac{1}{3}u_{n+1}$ . Donc  

$$u_{n+2} \geq 4u_{n+1} - \frac{1}{3}u_{n+1} = \frac{11}{3}u_{n+1} \geq 3u_{n+1}. \text{ Donc } P(n+1) \text{ est vraie.}$$
Par récurrence,  $P(n)$  est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- (c) On raisonne à nouveau par récurrence simple.  
Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(n)$  l'assertion «  $u_n \geq 3^{n-1}u_1$  ».  
On a  $3^{1-1} = 1 = u_1$ . Donc  $P(1)$  est vraie.  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons  $P(n)$  vraie. On a alors  $u_n \geq 3^{n-1}$ , donc, d'après la question précédente :  

$$u_{n+1} \geq 3u_n \geq 3^n. \text{ Donc } P(n+1) \text{ est vraie. Par récurrence, } P(n) \text{ est donc vraie pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
- (d) Comme  $3 > 1$ ,  $3^{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .  
D'après le théorème de divergence par minoration, on a donc  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

2. (a) On a directement :

$$\begin{aligned} 4v_{n+1} - v_n &= 4a(2 + \sqrt{3})^{n+1} + 4b(2 - \sqrt{3})^n - a(2 + \sqrt{3})^n - b(2 - \sqrt{3})^n \\ &= a \left( 4(2 + \sqrt{3}) - 1 \right) (2 + \sqrt{3})^n + b \left( 4(2 - \sqrt{3}) - 1 \right) (2 - \sqrt{3})^n \\ &= a \left( 7 + 4\sqrt{3} \right) (2 + \sqrt{3})^n + b \left( 7 - 4\sqrt{3} \right) (2 - \sqrt{3})^n. \end{aligned}$$

Or  $(2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$  et  $(2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$ , donc :

$$4v_{n+1} - v_n = a(2 + \sqrt{3})^{n+2} + b(2 - \sqrt{3})^{n+2} = v_{n+2}.$$

- (b) On a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} v_0 &= 0 \\ v_1 &= 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b &= 0 \\ a(2 + \sqrt{3}) + b(2 - \sqrt{3}) &= 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= -b \\ -b(2 + \sqrt{3}) + b(2 - \sqrt{3}) &= 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= -b \\ -2\sqrt{3}b &= 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ b &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases}. \end{aligned}$$

(c) D'après les calculs ci-dessus, la suite  $(u_n)$  a pour terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2 + \sqrt{3})^n - \frac{1}{2\sqrt{3}}(2 - \sqrt{3})^n.$$

### Exercice 2.

1. Vrai : soient  $a, b \in \mathbb{N}$ , supposons-les impairs. Soient  $k$  et  $l \in \mathbb{N}$  tels que  $a = 2k + 1$  et  $b = 2l + 1$ , alors :

$$a \times b = (2k + 1)(2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1,$$

donc  $a \times b$  est impair.

2. Faux : pour  $x = -2$  et  $y = 1$ , on a  $x \leq y$ , mais  $x^2 = 4 > y^2 = 1$ .

3. Vrai : soit  $\varepsilon > 0$ ,  $a = \frac{\varepsilon}{2}$  convient.

4. Vrai : on raisonne par l'absurde. Supposons que  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ . Soient  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  tels que  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{p}{q}$ .

On suppose cette fraction irréductible. Alors  $q\sqrt{3} = p\sqrt{2}$ , donc  $3q^2 = 2p^2$ .  $3q^2$  est donc pair, donc  $q$  est pair, donc  $q = 2q'$  pour un certain  $q' \in \mathbb{N}^*$ , donc  $12q'^2 = 2p^2$ , donc  $6q'^2 = p^2$ .  $p^2$  est donc pair, donc  $p$  est pair, ce qui contredit l'hypothèse d'irréductibilité de  $\frac{p}{q}$ . Donc  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ .

### Exercice 3.

1. L'assertion  $P$  se lit : « Pour tous réels  $a$  et  $b$ , si  $ab$  est supérieur ou égal à  $a$ , alors  $a$  est négatif ou  $b$  est supérieur ou égal à 1. »
2. On a directement :  $\neg A = (ab \geq a)$ ; et, d'après les lois de De Morgan :  $\neg B = (a > 0 \wedge b < 1)$ .
3. La négation de  $A \Rightarrow B$  étant  $A \wedge (\neg B)$ , on a

$$\neg P : \exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, (ab \geq a) \wedge (a > 0 \wedge b < 1).$$

4. (a) La contraposée de  $A \Rightarrow B$  étant  $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ , elle s'écrit :

$$(a > 0 \wedge b < 1) \Rightarrow (ab < a).$$

(b) Oui : Supposons que  $a > 0$  et  $b < 1$ . Alors  $a \times b < a \times 1$ , et donc  $ab < a$ .

(c) Oui : Comme la contraposée de  $A \Rightarrow B$  est équivalente à  $A \Rightarrow B$  et que cette contraposée est vraie,  $A \Rightarrow B$  est vraie ; et ceci pour  $a, b \in \mathbb{R}$  arbitraires. Donc  $P$  est vraie.

### Problème.

- I. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $f(n) = n$ , donc :  $f(n) + f(f(n)) = n + f(n) = 2n$ , donc  $f$  vérifie (E).
- II. 1. On sait que :  $f(0) + f(f(0)) = 0$ . Or  $f(0)$  et  $f(f(0))$  sont tous deux dans  $\mathbb{N}$ , donc sont positifs ; donc, nécessairement :  $f(0) = f(f(0)) = 0$ .
2. On généralise le raisonnement précédent :  
Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ,  $f(n) \in \mathbb{N}$ , et de même  $f(f(n)) \in \mathbb{N}$ , donc  $f(f(n)) \geq 0$ , et donc  $f(n) = 2n - f(f(n)) \leq 2n$ . Donc  $f(n) \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ .
3. D'après le résultat de la question 1,  $f(1) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ . De plus, d'après (E),  $f(1) + f(f(1)) = 2$ . On raisonne par disjonction de cas :
- Si  $f(1) = 0$ , alors  $0 + f(0) = 2$ , donc  $f(0) = 2$ , ce qui est faux,
  - Si  $f(1) = 2$ , alors  $2 + f(2) = 2$ , donc  $f(2) = 0$ , donc, comme  $f(2) + f(f(2)) = 4$ ,  $0 + f(0) = 4$ , ce qui est faux.
- On a donc nécessairement  $f(1) = 1$ .
4. Soient  $m, n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $f(m) = f(n)$ .  
On a alors  $f(m) + f(f(m)) = f(n) + f(f(n))$ , donc, d'après (E),  $2m = 2n$ , donc  $m = n$ .
5. Supposons que  $f(n+1) \neq n+1$  :
- Si  $f(n+1) \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , alors d'après l'hypothèse, il existe  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $f(n+1) = f(k)$ , donc d'après 4.,  $n+1 = k$ , ce qui est absurde.
  - Si  $f(n+1) \geq n+2$  : d'après (E),  $f(n+1) + f(f(n+1)) = 2(n+1)$ , et si  $f(f(n+1)) \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , alors d'après l'hypothèse, il existe  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $f(f(n+1)) = f(k)$ , donc d'après 4.,  $f(n+1) = k$ , ce qui est absurde. Donc  $f(f(n+1)) \geq n+1$ , et donc  $f(n+1) + f(f(n+1)) \geq 2n+3$ , ce qui est absurde d'après (E).
- Donc  $f(n+1) = n+1$ .
6. D'après l'initialisation de la question 2 et l'hérédité de la question 5, par récurrence forte, on a l'assertion voulue.
- III. Par analyse-synthèse, l'application  $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n \end{cases}$  est l'unique solution au problème.