Devoir surveillé n° 1

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.

La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.

Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. (8 points) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n.$$

1. (a) Montrer par récurrence double que tous les termes de la suite (u_n) sont des entiers.
 (b) Montrer par récurrence simple que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq 3u_n$.
 (c) En déduire, toujours par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 3^{n-1}$.
 (d) En déduire la limite de la suite (u_n) .
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère la suite de terme général $v_n = a(2 + \sqrt{3})^n + b(2 - \sqrt{3})^n$.
 (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $v_{n+2} = 4v_{n+1} - v_n$.
 (b) Déterminer a et b tels que $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$.
 (c) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

Exercice 2. (6 points) Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. $\forall a, b \in \mathbb{N}, (a \text{ et } b \text{ sont impairs}) \Rightarrow (a \times b \text{ est impair}),$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y) \Rightarrow (x^2 \leq y^2),$
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}, |a| < \varepsilon,$
4. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}.$

Exercice 3. (6 points) On considère deux assertions $A = (ab \geq a)$ et $B = ((a \leq 0) \vee (b \geq 1))$, puis l'assertion P suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (A \Rightarrow B).$$

1. Écrire P en toutes lettres.
2. Écrire la négation de A et celle de B (en symboles mathématiques).
3. En déduire la négation de P .
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
 (a) Écrire la contraposée de $A \Rightarrow B$.
 (b) Cette contraposée est-elle vraie ?
 (c) L'assertion P est-elle vraie ?

Problème. (10 points) On veut déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) + f(f(n)) = 2n. \quad (E)$$

I. On considère $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n$. Montrer que f vérifie l'assertion (E).

II. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant (E).

1. Déterminer $f(0)$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

3. En raisonnant par disjonction de cas, déterminer $f(1)$.

4. Montrer que :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, f(m) = f(n) \Rightarrow m = n.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(k) = k.$$

En raisonnant par l'absurde, montrer que $f(n + 1) = n + 1$.

6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n$.

III. Conclure, en précisant le type de raisonnement utilisé.