# DL1 ( Corrigé )

$\boxed{1}$ Pour faire un raisonnement par récurrence,il suffit d'initialiser pour $n = 1 : U = u_1 J + \dfrac{v_1}{2} I$ et de remarquer que $UJ = \dfrac{v_1}{2} J + u_1 J^2 = \dfrac{v_1}{2} J + u_1 \dfrac{5}{4} I$. On a en outre et sans peine que : $\boxed{\forall n, U_{n+2} = U_{n+1} + U_n.}$ ■
$\boxed{2}$ $U_p = U^p$ pour $p \leq 2$ par simple vérification. Supposons ce résultat valable jusqu'au rang $n \geq 1$. Alors $U_{n+1} = U_n + U_{n-1} = U^n + U^{n-1}$ par $\boxed{1}$ et hypothèse de récurrence. D'où $U_{n+1} = U^{n-1}(U + I) = U^{n-1}U^2 = U^{n+1}$. La propriété est donc héréditaire et on conclut quant à sa validité par le principe de récurrence■
$\boxed{3}$ Les propriétés du déterminant et un calcul direct donnent : $\det(U_n) = \det(U^n) = (\det(U))^n = (-1)^n$. Par ailleurs $\det(U_n) = \dfrac{1}{4} \begin{vmatrix} v_n & u_n\sqrt{5} \\ u_n\sqrt{5} & v_n \end{vmatrix} = \dfrac{v_n^2 - 5u_n^2}{4}$ Par conséquent :$\boxed{\forall n, v_n^2 - 5u_n^2 = 4(-1)^n.}$ ■
$\boxed{4}$ Il suffit d'observer que $U_{p+q} = U^{p+q} = U^p U^q = U_p U_q$ puis de traduire sur les coefficients cette égalité matricielle : $\forall\,(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $\boxed{u_{p+q} = \dfrac{u_p v_q + u_q v_p}{2}, v_{p+q} = \dfrac{v_p v_q + 5u_p u_q}{2}}$ ■
$\boxed{5}$ Le cours de première année dit que $\boxed{\forall n, U_n^{-1} = (-1)^n(\dfrac{v_n}{2} I - u_n J)}$ ■
$\boxed{6}$ Une récurrence facile semble s'imposer puisque : $\forall n \geq 2, P_{n+1} = XP_n + u_n P_2$■
$\boxed{7}$On a sans peine que $P_2 = \chi_U$ donc que $P_2(U) = 0_2$. Comme il existe ,pour tout $n$,un polynôme $Q_n$ tel que $P_n = Q_n P_2$, on a $P_n(U) = Q_n(U)P_2(U) = Q_n(U)0_2 = 0_2$. Ainsi $\boxed{\forall n \geq 2, P_n(U) = 0_2}$ ■
$\boxed{8}$Clairement $\chi_{U^n} = X^2 - v_n X + (-1)^n$ donc puisque $\chi_{U^n}(U^n) = 0_2$,$\boxed{\forall n \geq 2, U^{2n} - v_n U^n + (-1)^n I = 0_2}$ ■
$\boxed{9}$Par le cours $d^\circ(Q) = 2n - 2$, $d^\circ(R) \leq 1$. De $X^{2n} - v_n X^n + (-1)^n = QP_2 + R$ on déduit que : $U^{2n} - v_n U^n + (-1)^n I = Q(U)P_2(U) + R(U)$ ou encore : $0_2 = 0_2 + R(U)$ par $\boxed{7}$ et $\boxed{8}$ . Comme $(U, I)$ forme une famille libre ,$R = 0$.Soit aussi: $\boxed{\forall n \geq 2, P_2 \text{ divise } X^{2n} - v_n X^n + (-1)^n}$ ■
$\boxed{10}$ On a $\left(I - U^2\right) S_n = I - U^{2n+2}$,ce pour tout $n$. Ainsi , pour ces mêmes $n$,$US_n = U^{2n+2} - I$ ou :$\forall n, S_n = U^{2n+1} - U^{-1}$,ce qui ,en passant aux coefficients ,donne: $\boxed{\forall n, \alpha_n = v_{2n+1} + 1, \beta_n = u_{2n+1} - 1}$ ■
$\boxed{11}$ Il suffit de particulariser $\boxed{8}$ avec $n = 3$■
$\boxed{12}$ On déduit de la question précédente que pour tout $p$ : $P_2$ divise $X^{6+p} - 4X^{3+p} - X^p$ donc ,pour ces mêmes valeurs, $\boxed{U^{6+p} = 4U^{3+p} + U^p}$. Il suffit de passer aux coefficients pour obtenir les égalités voulues■
$\boxed{13}$ Ce qui précède montre que $(u_{3n})$ , $(v_{3n})$ satisfont la même relation de récurrence linéaire que $(t_n)$ ,on peut donc penser que cette dernière est combinaison linéaire des deux premières. On montre ,par une récurrence mémère,que : $\boxed{\forall n, t_n = u_{3n} + \dfrac{1}{2} v_{3n}}$ ■

♠♡♠