Devoir à la maison n° 1
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P_n : 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
   Pour $n = 1$: $\dfrac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2 = 1 \times 2$, donc P_1 est vraie.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons P_n vraie. On a alors $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$, donc :
   $$\begin{aligned} 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) + (n+1) \times (n+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}, \end{aligned}$$
   donc P_{n+1} est vraie.
   Par récurrence, P_n est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soient $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Supposons que $x + y \in \mathbb{Q}$.
   Il existe alors (a, b) et $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $x = \dfrac{a}{b}$ et $x + y = \dfrac{c}{d}$, donc $y = (x+y) - x = \dfrac{c}{d} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{bc - ad}{bd} \in \mathbb{Q}$. Donc $y \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. Donc $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Supposons que n est impair.
   Notons alors $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$. Quelle que soit la parité de k, le produit $k(k+1)$ est pair, et s'écrit donc $k(k+1) = 2p$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Donc $n^2 - 1 = 8p$, donc $n^2 - 1$ est divisible par 8.
   Par contraposée, l'assertion voulue est donc vraie.

Exercice 2.

1. Dans ce cas, tous les termes de la suite à partir du rang 12 sont supérieurs à $\sqrt{7}$.
2. D'après les lois de De Morgan, $\neg A(n_0, M) = (\exists n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0) \wedge (u_n < M))$
3. Cette négation s'écrit : $\exists M > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0) \wedge (u_n < M)$.
4. (a) Soit $M > 0$. On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $(n \geq n_0 \Rightarrow \ln(n^2 + 1) \geq M)$. Or :
   $$\ln(n^2+1) \geq M \Leftrightarrow n^2 + 1 \geq e^M \Leftrightarrow n \geq \sqrt{e^M - 1},$$
   donc $n_0 = E\left(\sqrt{e^M - 1}\right) + 1$, où E est la partie entière, convient.
   (b) On cherche $M > 0$ et, pour n_0 fixé, $n \geq n_0$ tel que $u_n < M$. Or, pour tout n impair, $u_n < 0$, donc on peut prendre $M = 1$ et, pour n_0 fixé, tout entier n impair $\geq n_0$ (par exemple $n = 2n_0 + 1$).