Rédactions-type en mathématiques

Ce document a pour objectif de proposer des modèles de rédactions pour certains types de questions fréquemment posées en mathématiques en CPGE, que ce soit en colle, en DS ou aux concours.

Rappelons que le souci de la bonne rédaction est fondamental en mathématiques. Une démonstration mathématique ne sert pas seulement à aboutir à un résultat ou une formule ; c'est également un texte destiné à être compris par toute personne possédant un bagage mathématique suffisant. De même qu'un texte littéraire ou qu'un code informatique, une démonstration écrite sans rigueur ni souci de clarté n'a aucune valeur et n'est qu'une perte de temps pour son rédacteur.

Pour cette raison, dans les examens et dans les concours, le soin et la rédaction sont largement pris en compte dans la notation ; et même un résultat de calcul correct, s'il n'est pas justifié, peut ne vous valoir aucun point !

Gardez à l'esprit que votre correcteur ne vous connaît **que par votre copie** : elle est à la fois votre CV et votre lettre de motivation. Une rédaction négligente est un très mauvais signal à envoyer, surtout en début de copie : le correcteur se fera **très** rapidement une mauvaise impression de vous, et sa notation en sera d'autant plus sévère. Gardez ceci en tête : si vous ne faites pas l'effort de bien vous exprimer, pourquoi le correcteur ferait-il l'effort de bien vous entendre ?

Rappelons également que la résolution d'une question demande avant tout une pleine connaissance, dans le chapitre concerné :

- des définitions des notions introduites,
- des principaux résultats que sont les théorèmes et propositions, avec leurs hypothèses.

Ces notions et ces résultats doivent non seulement être appris **par cœur**, mais également **compris** :

- quelle est l'utilité de cette notion, à quoi "ressemble"-t-elle ?
- que dit ce résultat, quelles sont sa portée et ses limites, pourquoi chacune des hypothèses est-elle importante ?

Vous n'arriverez sans doute pas à faire le tour des interrogations ci-dessus dès la première lecture de votre cours, et c'est tout à fait normal ; mais il est fondamental d'essayer d'y répondre. Sans une bonne connaissance des outils à votre disposition, se lancer dans des exercices est **parfaitement inutile**.

Rappelons enfin qu'en CPGE, et dans les études supérieures en général, l'exercice-type **n'existe pas** : en tant que futurs ingénieurs, cadres ou scientifiques, votre rôle est de savoir vous adapter à des situations nouvelles, et de pouvoir mobiliser vos connaissances pour vous ramener à des questions connues ; c'est-à-dire à des questions, telles que celles présentées dans ce document, dont la méthode de résolution, et la rédaction de la réponse, doivent vous être familières et être mises en œuvre sans vain effort.

Table des matières

1 Syntaxe

Tout texte mathématique est d'abord un texte écrit en français. Avec ou sans symboles mathématiques, toute phrase doit être grammaticalement correcte et s'inscrire dans un raisonnement cohérent.

Par exemple, la phrase mathématique « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ » se lit « Pour tout réel x, x au carré est supérieur ou égal à zéro. »

Il est de bon usage de ne pas mélanger symboles mathématiques et écriture en toutes lettres. Certaines tolérances existent, par exemple l'écriture « Soit $x \in \mathbb{R}$ » au lieu de « Soit x dans $\mathbb{R}$. »

2 Raisonnement

2.1 Variables et quantificateurs

Toute variable mathématique utilisée dans une démonstration doit être définie. Elle l'est soit par l'énoncé, soit par vous.

Si l'énoncé définit une variable, s'il dit par exemple : « Soit $n \in \mathbb{N}$ », **il ne faut pas** redéfinir n dans votre copie, ni utiliser ce symbole pour définir autre chose.

Par contre, si l'énoncé comporte une phrase du type « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = n^2$ », cela définit une suite (u_n), mais cela **ne définit pas** de variable n. C'est ensuite à vous, au moment opportun, d'introduire n dans votre copie, par une phrase du type « Soit $n \in \mathbb{N}$. »

2.2 Montrer une équivalence

C'est une généralisation du raisonnement précédent.

Énoncé : Soient P et Q deux assertions. Montrer que $P \Leftrightarrow Q$.

Rédaction :

On raisonne par double implication :

- Supposons P. Montrons Q.
  [Raisonnement]
  Donc Q. Donc $P \Rightarrow Q$.
- Réciproquement, supposons Q. Montrons P.
  [Raisonnement]
  Donc P. Donc $Q \Rightarrow P$.

On a ainsi montré que $P \Leftrightarrow Q$.

2.3 Écrire une récurrence

Énoncé : Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une assertion P_n. Montrer P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Rédaction :

On raisonne par récurrence :

- *Initialisation :* Montrons P_0.
  [Raisonnement]
  Donc P_0. Donc la récurrence est initialisée.
- *Hérédité :* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n. Montrons P_{n+1}.
  [Raisonnement]
  Donc P_{n+1}. Donc la récurrence est héréditaire.

On a ainsi montré P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.4 Écrire une analyse-synthèse

Énoncé : Déterminer l'ensemble des solutions du problème P.
Rédaction :

On raisonne par analyse-synthèse :

- *Analyse :* Supposons que P admette une solution x. Essayons* de caractériser x.
  [Raisonnement]
  Donc x appartient à un ensemble S.
- *Synthèse :* Soit un élément x de S. Vérifions si x est une solution de P.
  [Raisonnement]
  Donc x est une solution de P si et seulement si $x \in S' \subseteq S$.

On a ainsi montré que l'ensemble des solutions de P est S'.

**Remarque :* La caractérisation des solutions peut être obtenue soit lors de l'analyse (cas où $S' = S$), soit lors de la synthèse.

3 Calcul

3.1 Résoudre une équation du second degré

Énoncé : Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{C}$: (E) : $ax^2 + bx + c = 0$.
Rédaction :

Si $b = 0$, le calcul est **direct**. Si $b \neq 0$, on écrit :

L'équation (E) est une équation du second degré, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Elle a donc pour solutions :

- si $\Delta \geq 0$: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$,
- si $\Delta \leq 0$: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$,
- si $\Delta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$, où δ est une racine carrée de Δ.

Remarque : On peut également mettre (E) sous forme canonique.
Si l'inconnue est supposée réelle, il n'y a pas lieu de considérer les solutions non réelles.

3.2 Trouver les racines carrées d'un nombre complexe

Énoncé : Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: (E) : $z^2 = X + iY$.
Rédaction :

Soient $z \in \mathbb{C}$, notons $z = x + iy$. On a :

$$z^2 = \Delta \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & X \\ 2xy & = & Y \\ x^2 + y^2 & = & |X + iY| \end{array} \right. \Leftrightarrow \cdots$$

4 Ensembles et applications

4.1 Montrer une égalité d'ensembles

Énoncé : Soient A et B deux ensembles. Montrer que $A = B$.
Rédaction :

On raisonne par double inclusion :

- Soit $a \in A$. Montrons que $a \in B$.
  [Raisonnement]
  Donc $a \in B$. Donc $A \subset B$.
- Réciproquement, soit $b \in B$. Montrons que $b \in A$.
  [Raisonnement]
  Donc $b \in A$. Donc $B \subset A$.

On a ainsi montré que $A = B$.

4.2 Montrer qu'une application est injective / surjective

Énoncé : Soit $f : A \to B$ une application. Montrer que f est injective.
Rédaction :

Soient x_1, x_2 dans A tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Montrons que $x_1 = x_2$.
[Raisonnement]
Donc $x_1 = x_2$. On a ainsi montré que f est injective.

Énoncé : Soit $f : A \to B$ une application. Montrer que f est surjective.
Rédaction :

Soit y dans B. On cherche x dans A tel que $y = f(x)$.
[Raisonnement]
Donc $x = \cdots$. On a ainsi montré que f est surjective.

4.3 Montrer qu'une application est bijective, et déterminer sa bijection réciproque

Énoncé : Soit $f : A \to B$ une application. Montrer que f est bijective, et déterminer sa bijection réciproque.
Rédaction :

> Soient $x \in A$ et $y \in B$. On a :
>
> $$y = f(x) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = \cdots .$$
>
> On a ainsi montré que f est bijective, et que sa bijection réciproque est donnée par $f^{-1} : \begin{array}{rcl} B & \to & A \\ y & \mapsto & \cdots \end{array}$

5 Analyse

5.1 Montrer qu'une suite est croissante / décroissante / constante

Énoncé : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Montrer que (u_n) est croissante.
Rédaction :

> Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+1} - u_n = \cdots \geq 0$.
> On a ainsi montré que (u_n) est croissante.

5.2 Montrer qu'une fonction est continue / dérivable / de classe C^∞

Énoncé : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Montrer que f est continue.
Rédaction :

> f est la somme / le produit / le quotient* / la composée de $\cdots$ par $\cdots$, qui sont usuellement continues.
> On a ainsi montré que f est continue.

**Remarque :* Dans le cas du quotient, il convient de mentionner (et de justifier !) que le dénominateur ne s'annule pas.

5.3 Appliquer le théorème de la bijection continue

Énoncé : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J.
Rédaction :

> La fonction f est continue et strictement croissante donc, d'après le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de I dans $f(I) = \cdots = J$.
> On a ainsi montré que f réalise une bijection de I dans J.

5.4 Résoudre une équation différentielle d'ordre 1

Énoncé : Résoudre l'équation (E) : $y' + ay = b$.
Rédaction :

> L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
> L'équation homogène associée (E_h) : $y_h' + ay_h = 0$ a pour solutions les $y_h : t \mapsto \lambda e^{-\int a}, \ \lambda \in \mathbb{R}$.
> Une solution particulière de (E) est donc $y_p : t \mapsto \lambda(t)e^{-\int a}$, avec $\lambda'(t)e^{-\int a} = b$, c'est-à-dire $\lambda' = be^{\int a}$. Donc $\lambda = \cdots$ convient, donc $y_p = \cdots$ convient.
> Donc l'ensemble des solutions de (E) est $S = \{y : t \mapsto \cdots\}$.

5.5 Résoudre une équation différentielle d'ordre 2

Énoncé : Résoudre l'équation (E) : $ay'' + by + c = f$.
Rédaction :

> L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
> Le polynôme caractéristique associé à (E) est $P(r) = ar^2 + br + c$, de racines $r_{1,2} = \cdots$.
> Donc l'équation homogène (E_h) : $ay_h'' + by_h' + cy_h = 0$ associée à (E) a pour solutions les $y_h : t \mapsto \cdots , \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
> Comme f est une fonction polynomiale/exponentielle, une solution particulière de (E) est $y_p = \cdots$.
> Donc l'ensemble des solutions de (E) est $S = \{y : t \mapsto \cdots\}$.

6 Algèbre linéaire

6.1 Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel

Énoncé : Soit F une partie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
Rédaction :

> Montrons que $0_E \in F$.
> *[Raisonnement]*
> Donc $0_E \in F$. Donc F est non-vide.
> Soient $u, v \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda u + \mu v \in F$.
> *[Raisonnement]*
> Donc $\lambda u + \mu v \in F$. Donc F est stable par combinaison linéaire.
> On a ainsi montré que F est un sous-espace vectoriel de E.

6.2 Mettre un sous-espace vectoriel sous forme Vect

Énoncé : Soit F un sous-espace vectoriel de E. Mettre F sous forme Vect.
Rédaction :

Soit $u \in E$. On a :

$$u \in F \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow u = \cdots^*,$$

donc $F = \mathrm{Vect}(\cdots)$.

**Remarque :* Pour le détail des calculs, se référer aux exemples traités en classe.

6.3 Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires

Énoncé : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
Rédaction :

- Montrons que $F \cap G = \{0_E\}$:
  Soit $u \in F \cap G$, montrons que $u = 0_E$.
  [Raisonnement]
  Donc $u = 0_E$. Donc $F \cap G \subset \{0_E\}$.
  Or, comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $\{0_E\} \subset F \cap G$.
  Donc $F \cap G = \{0_E\}$.
- Montrons que $F + G = E$:
  Soit $u \in E$. On cherche $v \in F$ et $w \in G$ tels que $u = v + w$.
  [Raisonnement]
  Donc $u \in F + G$. Donc $E \subset F + G$.
  Or, comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $F + G \subset E$.
  Donc $F + G = E$.

Donc F et G sont supplémentaires dans E : $F \oplus G = E$.

6.4 Montrer qu'une famille de vecteurs est libre

Énoncé : Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Montrer que cette famille est libre.
Rédaction :

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E$.
[Raisonnement]
Donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Donc la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.

6.5 Montrer qu'une application est linéaire

Énoncé : Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que f est linéaire.
Rédaction :

Soient $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(\lambda u + \mu v) = \cdots = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

On a ainsi montré que f est linéaire.

6.6 Déterminer un noyau / un ensemble image

Énoncé : Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
Rédaction :

Soit $u \in E$. On a :

$$u \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_F \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow u = \cdots *.$$

On a ainsi montré que $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid \cdots\} = \mathrm{Vect}(\cdots)$.

Énoncé : Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
Rédaction :

Soit $u \in E$. On a :

$$f(u) = \cdots *.$$

On a ainsi montré que $\mathrm{Im}(f) = \{x \in E \mid \cdots\} = \mathrm{Vect}(\cdots)$.

**Remarque :* Pour le détail de la mise sous forme Vect, se référer aux exemples traités en classe.