Feuille d'exercices 1
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 2.
(a) À tout x dans I, la fonction f associe une valeur réelle y ; autrement dit, f est bien définie.
(b) Une même valeur réelle y est associée par f à tous les x dans I ; autrement dit, f est constante.
(c) Il existe un rang n_0 tel que tous les termes de la suite (u_n) sont égaux à u_{n_0} à partir du rang n_0 ; autrement dit, (u_n) est stationnaire.
(d) Pour chaque n dans $\mathbb{N}$, il existe un entier n_0 tel que, s'il est inférieur à n, alors u_n et u_{n_0} sont égaux ; ce qui ne dit rien sur la suite (pour n donné, il suffit de prendre $n_0 = n$).

Exercice 5.
(a) Ensemble des fonctions majorées
(b) Ensemble vide : pour x donné, l'inégalité est fausse pour $A = f(x) - 1$ par exemple.
(c) Ensemble des fonctions non minorées (considérer la négation)
(d) Ensemble de toutes les fonctions : l'inégalité est vraie pour $x = 0$ et $A = f(0) + 1$ par exemple.

Exercice 18. On procède par récurrence triple.
Notons, pout tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ l'assertion « $u_n = n(n-1)$. »
- $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies (calcul direct)
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$, $P(n+1)$ et $P(n+2)$. Alors, par hypothèse de récurrence :

$$u_{n+3} = 3(n+1)(n+2) - 3n(n+1) + n(n-1) = (n+2)(n+3),$$

donc $P(n+3)$ est vraie. Donc P est héréditaire.

On a bien montré : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

Exercice 19. On procède par récurrence double.
Notons, pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'assertion « $1 \leq u_n \leq n^2$. »
- $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies (calcul direct)
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$. Alors, par hypothèse de récurrence :

$$1 + \frac{1}{n+1} \leq u_{n+2} \leq (n+1)^2 + \frac{n^2}{n+1}.$$

Or $1 \leq 1 + \dfrac{1}{n+1}$, donc $1 \leq u_{n+2}$, et :

$$(n+1)^2 + \frac{n^2}{n+1} \leq (n+2)^2 \Leftrightarrow \frac{n^2}{n+1} \leq (n+2)^2 - (n+1)^2 = 2n+3 \Leftrightarrow n^2 \leq (n+1)(2n+3),$$

où la dernière inégalité est vraie, donc par équivalence, la première également ; donc $u_{n+2} \leq (n+2)^2$.
Donc $P(n+2)$ est vraie. Donc P est héréditaire.

On a bien montré : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

Exercice 20. Il suffit d'initialiser l'assertion pour les entiers de 8 à 15. En effet, tout entier $n \geq 16$ s'écrit $n = 8k + p$ où $p \in [\![8, 15]\!]$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Soient alors $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $p = 3a + 5b$, on a :

$$n = 3k + 5k + 3a + 5b = 3(a + k) + 5(b + k).$$

On vérifie donc : $8 = 3 \times 1 + 5 \times 1$; $9 = 3 \times 3 + 5 \times 0$; $10 = 3 \times 0 + 5 \times 2$; $11 = 3 \times 2 + 5 \times 1$; $12 = 3 \times 4 + 5 \times 0$; $13 = 3 \times 1 + 5 \times 2$; $14 = 3 \times 3 + 5 \times 1$; $15 = 3 \times 5 + 5 \times 0$.