Devoir à la maison n° 1

Exercice 1.
1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

2. Montrer par l'absurde que :

$$\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

3. Montrer par contraposée que :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (n^2 - 1 \text{ n'est pas divisible par } 8) \Rightarrow (n \text{ est pair}).$$

Exercice 2. On considère une suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour $n_0 \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}_+^*$, on pose l'assertion :

$$A(n_0, M) = (\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq M))\,.$$

1. Expliquer en français ce qu'on peut dire de la suite (u_n) si $A(12, \sqrt{7})$ est vraie.
2. Écrire la négation de $A(n_0, M)$.
   On rappelle la définition : $(P \Rightarrow Q) = (\neg P) \vee Q$.
3. On dit que la suite (u_n) *tend vers* $+\infty$ si :

$$\forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ A(n_0, M).$$

   Écrire en langage mathématique l'assertion « (u_n) ne tend pas vers $+\infty$ ».
4. Montrer, en utilisant ces assertions, que :
   (a) la suite $\left(\ln(n^2+1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$,
   (b) la suite $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$.