Feuille d'exercices 1
LOGIQUE ET RAISONNEMENT

1 - QUANTIFICATEURS

Exercice 1. Traduire en français les énoncés suivants. Quelle est leur valeur de vérité ?

(a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \leq N$,
(b) $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \leq N$,
(c) $\forall y \geq 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = x^2$,
(d) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \geq 0,\ y = x^2$.

Exercice 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Traduire en français les énoncés suivants :

(a) $\forall x \in I,\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = y$,
(b) $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = y$,
(c) $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0}$,
(d) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0}$.

Exercice 3. Soient x un réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

(a) il existe un réel y strictement supérieur à x,
(b) tout réel négatif est inférieur ou égal à x,
(c) si le cube d'un réel y est égal au cube de x, alors x et y sont égaux,
(d) (u_n) est positive,
(e) (u_n) est majorée,
(f) (u_n) est périodique.

Exercice 4. Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes et leur négation :

(a) f s'annule,
(b) f est la fonction nulle sur I,
(c) f n'est pas constante,
(d) f présente un minimum sur I,
(e) f est majorée sur I,
(f) f s'annule exactement une fois sur I.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

(a) $\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq A$,
(b) $\forall A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq A$,
(c) $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq A$,
(d) $\exists A \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq A$.

Exercice 6. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(a) $\exists x \in \mathbb{R}_+,\ x < \sqrt{x}$,
(b) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$,
(c) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \Rightarrow x \geq 3$,
(d) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2,\ x < y \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$,
(e) $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ x \neq y \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-1} \neq \dfrac{y+1}{y-1}$,
(f) $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \geq N$,
(g) $\exists n, x, y, z \in \mathbb{N}^*,\ x^n + y^n = z^n$.

2 - Types de raisonnement

Exercice 7. *Principe des tiroirs*

(a) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On répartit au hasard $n+1$ chaussettes dans n tiroirs. Montrer qu'au moins un tiroir contient au moins deux chaussettes.

(b) Application : Soit un triangle d'aire 1. Montrer que parmi 9 points à l'intérieur du triangle, il en existe toujours 3 qui délimitent un triangle d'aire inférieure à $\frac{1}{4}$.

Exercice 8. Soit x dans $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 9. Soit p un nombre premier. Montrer que $\sqrt{p}$ est irrationnel.

Exercice 10. Soit x un réel tel que : $\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon$. Montrer que $x = 0$.

Exercice 11. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 12. Que penser de la preuve suivante ?

Propriété. *Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: Dans une boîte de n crayons, tous les crayons sont de la même couleur.*

Preuve. Quand $n = 1$, l'assertion est vraie. Soit n dans $\mathbb{N}^*$, supposons l'assertion vraie pour n crayons. Parmi $n+1$ crayons, les n premiers sont donc de la même couleur, et les n derniers aussi. Donc les $n+1$ crayons sont de la même couleur. Donc par récurrence, l'assertion est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. □

3 - Raisonnement par récurrence

Exercice 13. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 14. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Exercice 15. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}}_{n \text{ fois}} = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Exercice 16. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

Exercice 17. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n - 2^n$.

Exercice 18. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n(n-1)$.

Exercice 19. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{u_n}{n+1}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq n^2$.

Exercice 20. Montrer que tout entier supérieur ou égal à 8 peut s'écrire sous la forme $3a + 5b$ pour certains $a, b \in \mathbb{N}$.

Feuille d'exercices 2
CALCULS ALGÉBRIQUES

1 - INÉGALITÉS DANS $\mathbb{R}$

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

(a) $|x+5| = x-2$

(b) $|2x-1| = |x+4|$

(c) $|x-1| \leq |x+3|$

(d) $|3x| \leq |2x+3|$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

(a) $x - 3\sqrt{x} - 10 = 0$

(b) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = 2$

(c) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3} = 2x$

(d) $\sqrt{x-1} \leq \sqrt{2x-5}$

(e) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} < \sqrt{3x+1}$

(f) $\sqrt{x - 4\sqrt{x} + 4} \geq 3$

Exercice 3.

(a) Soient a et b dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(a+b)^2 \geq 4ab$.

(b) En déduire que : $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^3,\ (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

(c) En déduire que : $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3,\ (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$.

Exercice 4. Soient a et b deux réels non nuls. Résoudre l'équation en x : $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b}$.

Exercice 5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** Montrer que : $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ |ab+cd| \leq \sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}$.
Indication : Étudier le trinôme en x : $(a+bx)^2 + (c+dx)^2$.

2 - SOMMES ET PRODUITS

Exercice 6. Démontrer par récurrence la formule : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 7.

(a) Déterminer des réels a, b, c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.

(b) En déduire, pour n dans $\mathbb{N}^*$, la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 8. Calculer les sommes et les produits suivants, où $n \in \mathbb{N}^*$:

(a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

(b) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$

(c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k(2k+1)$

(d) $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}$

Exercice 9. Calculer $\sum_{k=0}^{9}(k+1)^2$, d'une part en développant $(k+1)^2$, d'autre part en posant $l=k+1$.

Exercice 10. Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer les inégalités suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\leq\frac{4}{3}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k!\leq(n+1)!$

Exercice 11. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

Exercice 12. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Calculer les sommes doubles suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n}(i+j)$

(b) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n}(i+j)^2$

(c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}3^i$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}$

(e) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n}\min(i,j)$

(f) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n}|i-j|$

3 - Coefficients binomiaux

Exercice 13. Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer que $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.

Exercice 14. Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer les inégalités suivantes :

(a) $2^n\geq n+1$

(b) $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ (1+x)^n\geq 1+nx$

Exercice 15. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\sum_{k,\ 0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}$ et $J_n=\displaystyle\sum_{k,\ 0\leq 2k+1\leq n}\binom{n}{2k+1}$.
Calculer I_n+J_n et I_n-J_n, et en déduire I_n et J_n.

Exercice 16. Déterminer les suites $(a_n)_{n\in N}$ et $(b_n)_{n\in N}$ telles que : $\forall n\in\mathbb{N},\ (1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$.

Exercice 17. Soit n dans $\mathbb{N}$.

(a) Soit k dans $[\![0,n]\!]$. Simplifier $\dfrac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n}{k}}$.

(b) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 18. Soit n dans $\mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}$.

Exercice 19. Soient n et p deux entiers naturels tels que $p\leq n$.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$.

(b) En appliquant la formule ci-dessus pour $p=1$ et $p=2$, retrouver les formules donnant la somme des n premiers entiers et la somme des n premiers carrés.

Exercice 20. Soit n dans $\mathbb{N}$.

(a) Soient i et j deux entiers tels que $0\leq i\leq j\leq n$. Montrer que $\displaystyle\binom{n}{j}\binom{j}{i}=\binom{n}{i}\binom{n-i}{j-i}$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{i}$.

Feuille d'exercices 3
FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

1 - GÉNÉRALITÉS

Exercice 1. Les fonctions suivantes sont-elles paires ? impaires ? périodiques ?

- $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array} \right.$
- $h : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin^2(x) \end{array} \right.$
- $g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \frac{2y}{1+y^2} \end{array} \right.$
- $i : \left\{ \begin{array}{rcl} D & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{\cos(2t)} \end{array} \right.$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour tout a dans $\mathbb{R}$, on note $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = f(x+a)$. On suppose qu'il existe des réels a et b tels que f_a est paire et f_b est impaire. Montrer que f est périodique.

Exercice 3. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On note $g : A \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto 2 - f(x)$. Par quelle transformation obtient-on le graphe de g à partir de celui de f ?

Exercice 4. Soit $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ une fonction. On note g la fonction $x \mapsto 2f\left(\frac{x}{2}\right)$.
(a) Quel est le domaine de définition de g ?
(b) Par quelle transformation obtient-on le graphe de g à partir de celui de f ?

Exercice 5. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si f est croissante et g est décroissante, que dire de $f \circ g$? et de $g \circ f$? Et si f et g sont toutes deux croissantes ? décroissantes ?

Exercice 6. Donner un exemple de :
(a) fonction majorée n'admettant pas de maximum,
(b) fonction bornée n'admettant pas d'extremum,
(c) fonction à la fois paire et impaire,
(d) fonction croissante et périodique sur $\mathbb{R}$,
(e) fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telle que tout réel admette exactement deux antécédents par f.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.
(a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(x) = \dfrac{f(nx)}{n}$.
(b) En déduire que f est la fonction nulle.

2 - DÉRIVATION

Exercice 8. Déterminer l'ensemble des fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
(a) Montrer l'assertion : (f paire)$\Rightarrow$(f' impaire). La réciproque est-elle vraie ?
(b) Mêmes questions en échangeant « paire »et « impaire ».
(c) Soit $T > 0$, on suppose que f est T-périodique. Montrer que f' l'est également.

Exercice 10. Déterminer pour chaque fonction son domaine de définition, le domaine sur lequel elle est dérivable, et calculer sa dérivée.

- $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1-x^2}$
- $g : x \mapsto e^{-2x^2-5}$
- $h : x \mapsto \sqrt{3x-4}$
- $i : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+3x+1}$
- $j : x \mapsto \dfrac{x^2+x-6}{x+3}$
- $k : x \mapsto 1-\ln(5x-1)$
- $l : x \mapsto \dfrac{3\sin(x)}{\cos(2x)}$
- $m : x \mapsto \sqrt{|x^2-3x+2|}$
- $n : x \mapsto x^x$
- $p : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$
- $q : x \mapsto e^{x\tan x}$
- $r : x \mapsto \dfrac{e^{x^2}}{\ln(x)-1}$

Exercice 11. Étudier les fonctions suivantes : domaine de définition, dérivabilité, variations, graphe.

- $f : x \mapsto \sqrt{x-\sqrt{x}}$
- $g : x \mapsto \sqrt{1-\sin x}$
- $h : x \mapsto \dfrac{x}{e^x-1}$
- cotan : $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$

Exercice 12. Montrer que : $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \dfrac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t$.

Exercice 13.

(a) Montrer que : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$.

(b) Soit a un réel. Déduire de la question précédente que pour tout entier $n > |a|$, $\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n \leq e^a \leq \left(1-\dfrac{a}{n}\right)^{-n}$.

Exercice 14. Calculer, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto \sin^3(x)$,
- $g : x \mapsto x^{n-1}\ln(x)$.

3 - Bijections

Exercice 15. On considère la fonction $\tan : \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

(a) Montrer que $\tan$ est une bijection. On note $\arctan$ sa réciproque.

(b) Déterminer les variations de $\arctan$.

(c) En utilisant la formule de composition des dérivées, calculer la dérivée de $\arctan$.

Exercice 16. Montrer que la fonction $x \mapsto x+\sin(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 17. Déterminer dans chaque cas E et F tels que la fonction $E \to F$ ainsi définie soit bijective. Déterminer alors la fonction réciproque.

- $x \mapsto \sqrt{2x+3}-1$
- $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$

Exercice 18. Soit $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f. Montrer que $f \circ f = \mathrm{Id}$.

(b) En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même. Déterminer sa réciproque.

Exercice 19. Montrer que la fonction $u : [0,1] \to [0,1]$ définie par : $\forall x \in [0,1],\ u(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{sinon} \end{cases}$, est une bijection, et que $u^{-1} = u$.

Exercice 20. Soit $f : E \to F$ une fonction impaire et bijective. Montrer que f^{-1} est impaire. A-t-on un énoncé analogue pour une fonction paire ?

Feuille d'exercices 4
NOMBRES COMPLEXES

1 - ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

Exercice 1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

(a) $(3+2i)(1-i)$
(b) $\dfrac{1}{2-i\sqrt{3}}$
(c) $(1-i)^3$
(d) $\dfrac{4+3i}{-2+7i}$
(e) $\dfrac{2+5i}{1-i}+\dfrac{2-5i}{1+i}$
(f) $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2$

Exercice 2. Soit z dans $\mathbb{C}^*$. Calculer $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ et $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

Exercice 3. Soit z dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. À quelle condition nécessaire et suffisante le complexe $\dfrac{z+1}{z-1}$ est-il réel ? imaginaire pur ? de module 1 ?

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^2-2iz-1+2i=0$
(b) $z^2-(1+i)z+2+2i=0$
(c) $z^4-z^2+1=0$
(d) $z+\dfrac{1}{z}=i\left(\dfrac{3}{z}-1\right)$

Exercice 5. Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

(a) $1+i\sqrt{3}$
(b) $\dfrac{\sqrt{8}}{1-i}$
(c) $1-e^{i\frac{\pi}{3}}$
(d) $-4i$
(e) -27
(f) $5-5i$

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $e^z=\sqrt{3}+i$
(b) $e^{i\pi z}=1-i$
(c) $e^{1-z}+e^z=\sqrt{2e}$

Exercice 7. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation : $(z+i)^n=(z-i)^n$.

Exercice 8. Déterminer les nombres complexes non nuls z tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $1-z$ aient le même module.

2 - TRIGONOMÉTRIE

Exercice 9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$
(b) $\tan(x)=-\sqrt{3}$
(c) $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$
(d) $\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Exercice 10. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivantes :

(a) $\begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{5}}{4} \\ \sin x = \frac{3}{4} \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Exercice 11. Linéariser les expressions suivantes :

(a) $\cos(2x)\sin^2(x)$

(b) $\cos^4(x)$

(c) $\cos^2(2x)\sin(4x)$

(d) $\cos(x)\cos(2x)\cos(3x)$

Exercice 12. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $\cos x = \cos 2x$

(b) $\sin x = \sin 2x$

(c) $\cos 2x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

(d) $\cos x = \sin\left(5x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

(e) $\tan 3x = \tan\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right)$

(f) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0$

Exercice 13. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(a) $\sin^2 x \leq \dfrac{1}{2}$

(b) $\cos x > \sin x$

(c) $\sin x < \sqrt{3}\cos x$

(d) $\cos x + \sin x \geq 1$

Exercice 14. Soit x un réel. Calculer les sommes suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$

3 - Géométrie plane

Exercice 15. Représenter l'ensemble des points du plan dont les affixes z vérifient :

(a) $-1 < \mathrm{Re}(2z-1) < 1$

(b) $\mathrm{Re}(z)(\mathrm{Im}(z)+1) = 1$

(c) $|z-i| = |z+i|$

Exercice 16. Démontrer et interpréter géométriquement l'*identité du parallélogramme* :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Exercice 17. Soit a dans $\mathbb{C}$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $|z| = 1$ et $|z-a| = 1$.

Exercice 18. Représenter l'ensemble des points du plan dont les affixes z vérifient $\mathrm{Im}(z^2) < 1$.

Exercice 19. Déterminer l'image du cercle unité par l'application $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$.

Exercice 20. Quel est l'ensemble des points du plan d'affixe z tels que :

1. les points d'affixe z, z^2 et z^4 sont alignés ?
2. les points d'affixe z, $\dfrac{1}{z}$ et $z-i$ sont alignés ?

Feuille d'exercices 5
Fonctions d'une variable réelle : fonctions usuelles

1 - Logarithmes, exponentielles, puissances

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $2^{x^2} = 3^{x^3}$

(b) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

(c) $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$

(d) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$

Exercice 2. Montrer que : $\forall x \in]0,1[,\ x^x(1-x)^{1-x} \geq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

(a) $\left\{ \begin{array}{rcl} 8^x &=& 10y \\ 2^x &=& 5y \end{array} \right.$

(b) $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y &=& 7 \\ \ln x + \ln y &=& 1 \end{array} \right.$

(c) $\left\{ \begin{array}{rcl} xy &=& a^2 \\ \ln^2 x + \ln^2 y &=& \frac{5}{2}\ln^2 a \end{array} \right.$

2 - Croissances comparées

Exercice 4. Soit $a > 0$. Déterminer en fonction de a les limites, quand $x \to 0$ et $x \to +\infty$, des fonctions suivantes :

(a) $a^x x^4$

(b) $a^{-x}\sqrt{x}$

(c) $x^{-a}\ln(1+e^x)$

Exercice 5. Soient a, b et c des réels strictement positifs. Déterminer les limites, aux bords de leur domaine de définition, des fonctions suivantes :

(a) $x^a e^{-bx}$

(b) $(\ln x)^a e^{-bx}$

(c) $e^{ax}x^{-b}(\ln x)^{-c}$

Exercice 6. Étudier (dérivabilité, variations, limites, graphe) les fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto a^x$ où $a > 0$

(b) $g : x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$

(c) $h : x \mapsto x^x$

Exercice 7. Déterminer les limites, quand $x \to +\infty$, des fonctions suivantes :

(a) $\dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$

(b) $\dfrac{a^{a^x}}{x^{x^a}}$ où $a > 1$

(c) $\dfrac{a^{b^x}}{b^{a^x}}$ où $1 < a < b$

3 - Fonctions trigonométriques

Exercice 8. Calculer :

(a) $\sin(\arcsin x)$ où $x \in [-1,1]$

(b) $\arcsin(\sin x)$ où $x \in \mathbb{R}$

(c) $\tan(\arcsin x)$ où $x \in [-1,1]$

(d) $\sin(\arctan x)$ où $x \in \mathbb{R}$

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $2\cos(2x) = \sqrt{3}$

(b) $2\cos^2 2x - 3\cos 2x = -1$

(c) $\sin 2x + \sin x = 0$

(d) $\sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0$

(e) $\cos 3x + \sin x = 0$

(f) $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$

(g) $\cos x + \sin x = 2$

(h) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$

Exercice 10. Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(b) $\cos(\arctan x)$ où $x \in \mathbb{R}$

(c) $\arctan\left(\tan\frac{9\pi}{4}\right)$

(d) $\tan(\arccos x)$ où $x \in]-1,0[\cup]0,1[$

Exercice 11. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $\arcsin x = \arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{1}{5}$

(b) $\arctan x = \arctan 3 + \arctan 4$

Exercice 12. Montrer que : $\forall x \in\,]-1,1[,\ \arcsin x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Exercice 13. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $\arcsin x = \arcsin\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}$

(b) $\arccos\frac{x+1}{2} = \arcsin x$

(c) $\arcsin 2x - \arcsin x\sqrt{3} = \arcsin x$

(d) $\arcsin x = 2\arccos x$

(e) $\arcsin x = \arctan 2x$

(f) $\arctan x + \arctan 3x = \frac{\pi}{2}$

4 - Fonctions hyperboliques

Exercice 14. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $\text{sh } x = \sqrt{3}$

(b) $\text{ch } x = \frac{5}{3}$

(c) $3 \text{ ch } 2x - 4\text{ch } x = 7$

(d) $\text{sh } 2x = \text{ch } x$

(e) $16 \text{ sh } x \text{ ch } x = 15$

(f) $\text{sh } x + \frac{2}{\text{sh } x} = 3$

Exercice 15. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le système : $\begin{cases} \text{ch } x + \text{ch } y &= a \\ \text{sh } x + \text{sh } y &= b. \end{cases}$

Exercice 16. Soit (n,x) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$. Calculer :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{ch}(kx)$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{sh}(kx)$

Feuille d'exercices 6
ENSEMBLES ET APPLICATIONS

1 - ENSEMBLES

Exercice 1. Identifier les ensembles suivants :

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon\}$,

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon\}$.

Exercice 2. Montrer les égalités suivantes :

(a) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] =]-1, 1[$,

(b) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[= [-1, 1]$.

Exercice 3. Soient E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E. Montrer que :

(a) $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$,

(b) $(A \cup B = A \cap C) \Leftrightarrow (B \subset A \subset C)$,

(c) $(A \cup B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B)$,

(d) $(A \cup B = A \cup C,\ A \cap B = A \cap C) \Leftrightarrow (B = C)$,

(e) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$,

(f) $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$.

Exercice 4. Soient E et F deux ensembles.

1. Montrer que $E \subset F \Leftrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.
2. Montrer que $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
3. A-t-on $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?

Exercice 5. Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$:

(a) $X \cup A = B$,

(b) $X \cap A = B$.

Exercice 6. Soient E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E. On note $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ la *différence symétrique* entre A et B. Montrer que :

(a) $A \Delta B = B \Delta A$,

(b) $A \Delta \emptyset = A$,

(c) $A \Delta A = \emptyset$,

(d) $A \Delta B = \overline{A} \Delta \overline{B}$,

(e) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$,

(f) $(A \Delta B = A \Delta C) \Leftrightarrow (B = C)$.

2 - APPLICATIONS

Exercice 7. Soient $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = 2n$, $g(2n) = n$ et $g(2n+1) = 0$.

(a) f et g sont-elles injectives ? surjectives ?

(b) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 8. Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N}^* \\ (m, n) & \mapsto & 2^m(2n+1) \end{array} \right.$ est bijective.

Exercice 9. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right. , \qquad h : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right. ,$$

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right. , \qquad i : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, xy-y^3) \end{array} \right. .$$

Exercice 10. Soit (a,b,c,d) dans $\mathbb{C}^4$ tel que $ad \neq bc$.
Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} & \to & \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array} \right.$ est bijective. Déterminer sa réciproque.

Exercice 11. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Montrer que f est injective si et seulement si : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 12. Soient E et F deux ensembles. Montrer qu'il existe une application injective de E dans F si et seulement s'il existe une application surjective de F dans E.

Exercice 13. Soient $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications, puis $h : \left\{ \begin{array}{rcl} E & \to & F \times G \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array} \right.$.

(a) Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.

(b) On suppose f et g surjectives. h est-elle surjective ?

Exercice 14. Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective f de E dans $\mathcal{P}(E)$. On pourra pour cela considérer $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

3 - Dénombrement

Exercice 15. Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p. Combien y a-t-il d'injections de E dans F ?

Exercice 16. Soient $E = [\![1, n]\!]$ et $F = [\![1, p]\!]$ avec $n \leq p$. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de E vers F ?

Exercice 17. Combien le mot "abracadabrantesque" a-t-il d'anagrammes ?

Exercice 18. Combien de nombres à 5 chiffres ne contiennent pas le chiffre 9 ?

Exercice 19. Montrer que dans un village de 700 habitants, au moins 2 personnes ont les mêmes initiales.

Exercice 20. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de listes d'entiers naturels non nuls dont la somme des termes fait n.

(a) Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4. Que peut-on conjecturer pour u_n ?

(b) Démontrer cette conjecture.

Feuille d'exercices 7
ARITHMÉTIQUE

1 - NOMBRES PREMIERS ET DIVISIBILITÉ

Exercice 1. Soit $n \geq 2$ entier. Montrer qu'il n'existe aucun nombre premier entre $n! + 2$ et $n! + n$.

Exercice 2. Montrer que $\dfrac{\ln 8}{\ln 7}$ est irrationnel.

Exercice 3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 40^n \times n!$ divise $(5n)!$.

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par N le nombre de diviseurs positifs de n et par P leur produit. Quelle relation existe-t-il entre n, N et P ?

Exercice 5. Déterminer le nombre de 0 apparaissant à la fin de l'écriture décimale du nombre $100!$.

Exercice 6.
(a) Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n - 4$ divise $3n - 17$.
(b) Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n + 1$ divise $2n^2 - 2n + 4$.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :
(a) $xy = 3x + 2y$,
(b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$,
(c) $x^2 - y^2 - 4x - 2y = 5$.

Exercice 8. Soit $n \geq 2$ entier. Soit $n = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs premiers. On cherche le nombre $d(n)$ de diviseurs de n.
(a) Déterminer $d(n)$ dans le cas $r = 1$.
(b) En déduire le cas général.

Exercice 9. Soient a et b deux entiers tels que $0 < b < a$, et soit (m, n) dans $\mathbb{N}^2$. Montrer que si m divise n, alors $a^m - b^m$ divise $a^n - b^n$.

Exercice 10. Pour tout nombre premier p, on note $M_p = 2^p - 1$.
(a) Donner quatre nombres M_p premiers. Ces nombres sont appelés *nombres premiers de Mersenne*.
(b) On rappelle qu'un entier est *parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts. Montrer que si M_p est premier, alors $2^{p-1}M_p$ est parfait.

Exercice 11. Montrer que l'équation $x^3 + x = 1$ a une et une seule solution réelle, puis que cette solution est irrationnelle.

2 - PGCD ET PPCM

Exercice 12. Déterminer le PGCD des entiers suivants :

(a) 27 et 37

(b) 270 et 105

(c) 96842 et 375

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quels sont les PGCD possibles de $2n+4$ et $3n+3$?

Exercice 14. Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers tels que $x \wedge y = 15$ et $xy = 900$.

Exercice 15. Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers tels que $x \wedge y = 5$ et $x \vee y = 60$.

Exercice 16. Soit (u_n) la suite de Fibonacci avec $(u_0, u_1) = (0, 1)$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathrm{PGCD}(u_{mn}, u_{m(n+1)})$.

3 - DIVISION EUCLIDIENNE

Exercice 17.

(a) Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré d'un entier impair est égal à 1.

(b) Montrer que si x est un entier pair, alors $x^2 = 0 \mod 8$ ou $x^2 = 4 \mod 8$.

(c) Si a, b, c sont trois entiers impairs, en déduire que $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 18. Soit p un nombre premier.

(a) Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. Montrer que p divise $\displaystyle\binom{p}{k}$.

(b) En déduire le *petit théorème de Fermat :* $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a^p = a \mod p$.

Exercice 19. (a) Montrer qu'un entier n est multiple de 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est multiple de 9.

(b) Montrer qu'un entier n est multiple de 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres est multiple de 11.

Exercice 20. Soient n un entier naturel, q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 10.

(a) Montrer que n est multiple de 7 si et seulement si $q - 2r$ est multiple de 7.

(b) En déduire un critère de divisibilité par 7. L'appliquer aux entiers 84, 173, 343, 526, 1001, 4345 et 5292.

Feuille d'exercices 8
PRIMITIVES

1 - CALCULS DE PRIMITIVES

Exercice 1. Déterminer les primitives suivantes :

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}dx$, (b) $\displaystyle\int 3x\sqrt{1+x^2}dx$, (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln(x^2)}$, (d) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}}dx$.

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Déterminer $\displaystyle\int \frac{dt}{t-\alpha}$.

Exercice 3. Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

(a) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

(b) Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2 - CALCULS D'INTÉGRALES

Exercice 5. On considère

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx.$$

Déterminer $I+J$ et $I-J$. En déduire I et J.

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{4\pi} \cos(t)e^{\sin(t)}dt$, (b) $\displaystyle\int_4^6 \frac{4}{(t-3)(t+1)}dt$, (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2}$, (d) $\displaystyle\int_6^8 \frac{dt}{t^2-4t-5}$.

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Déterminer le discriminant du polynôme $P(\lambda) = \displaystyle\int_a^b (f+\lambda g)^2$. En déduire l'inégalité suivante, dite *de Cauchy-Schwarz* :

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

En déterminer la condition d'égalité.

Exercice 8. Soit $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(px)\sin(qx)dx$.

Exercice 9. Calculer les primitives suivantes :

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3x-10}dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+9}$, (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-8x+20}$, (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{8x^2+50}$.

3 - Intégration par parties et changement de variables

Exercice 10. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_1^e x\ln x dx$, (b) $\displaystyle\int_0^1 \arctan t dt$, (c) $\displaystyle\int_0^\pi e^{4t}\cos(3t)dt$.

Exercice 11. Calculer les intégrales suivantes, où a, b, n sont des entiers naturels :

(a) $\displaystyle\int_1^e (\ln(t))^2 dt$, (b) $\displaystyle\int_0^1 x^a(1-x)^b dx$, (c) $\displaystyle\int_0^1 x^a(\ln x)^b dx$, (d) $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

Exercice 12. On considère : $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx$.

(a) Établir une formule de récurrence pour I_n.

(b) Exprimer I_n sous forme de somme.

Exercice 13. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$, (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$, (c) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx$, (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{x})dx$.

Exercice 14.

(a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,dt$.

Exercice 15. Déterminer $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx$. En déduire l'aire d'un disque de rayon 1.

Exercice 16. En utilisant les règles de Bioche, calculer les primitives suivantes :

(a) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}dx$, (c) $\displaystyle\int \frac{3-\sin x}{\cos x+3\tan x}dx$, (d) $\displaystyle\int \cos^2 x\sin^2 x dx$.

Exercice 17. En posant $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$, (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin x}$, (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x-\cos x+\sqrt{2}}$.

Exercice 18. On souhaite calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos t}$.

(a) À l'aide des formules trigonométriques, vérifier que $\cos t = \dfrac{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$.

(b) Effectuer alors le changement de variable $x=\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ et montrer que $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2\,dx}{1-x^2}$.

(c) En écrivant $\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{\alpha}{1-x}+\dfrac{\beta}{1+x}$ où α et β sont à déterminer, déterminer la valeur de I.

Feuille d'exercices 9
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

1 - ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $y' + 3y = t^2 e^{-t}$,
(b) $y' + y = \cos(t) + \sin(t)$ avec $y(0) = -1$,
(c) $y' - \dfrac{3t}{t^2+1} y = \sqrt{t^2+1} - t + \dfrac{2t}{t^2+1}$,
(d) $(1+t^2)y' + ty = t^3$,
(e) $(1+e^{-t})y' - y = 1$ avec $y(0) = 3$,
(f) $y' - y = \dfrac{1}{1+e^{2t}}$ avec $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes, en précisant le domaine de définition :

(a) $ty' - y = t^2 \sin t$,
(b) $(1-t^2)y' + 2ty = t$ avec $y(0) = 0$,
(c) $t(t-2)y' - 2y = (t-1)(t-3)$,
(d) $2t(\sqrt{t}+1)y' - (2\sqrt{t}+1)y = 0$.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y).$$

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

Exercice 5. Montrer qu'il existe une unique fonction $y : \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ telle que $y(0) = 1$ et

$$y'(t) = \frac{y(t)}{\cos t}.$$

La déterminer en posant $x = \sin(t)$.

2 - ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE

Exercice 6. Résoudre les équations suivantes :

(a) $y'' + 2y' + 4y = 0$,
(b) $y'' - 2y' - 3y = e^{-t}\cos t$,
(c) $y'' - 6y' + 8y = 16t^2$,
(d) $y'' - 2y' + y = \cos(2t)$ avec $y(0) = y'(0) = 0$,
(e) $y'' - y' + (1+i)y = 0$,
(f) $y'' + y = 2\mathrm{sh}\ (t)$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$,
(g) $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 7x^2 + 2x - 1$,
(h) $y'' - 2y' + 2y = xe^x$ avec $y(0) = 1$.

Exercice 7. Résoudre l'équation $y'' + y = |t| + 1$.

Exercice 8. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x).$$

Exercice 9. En posant $t = \ln(x)$, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation

$$x^2 y'' + 3y + 1 = (x+1)^2.$$

Exercice 10. En posant $x = \sin(t)$, résoudre sur $]-1,1[$ l'équation

$$(1-x^2)y'' - xy' + y = 0.$$

Exercice 11. Soit a dans $\mathbb{R}$. On considère y dans $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = e^{at} y(-t).$$

(a) Montrer que y est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que y vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

(c) En déduire les solutions du problème de départ.

3 - Pour aller plus loin

Exercice 12. Résoudre les systèmes suivants :

(a) $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y + t^2 \\ y' & = & x - t^2 \end{array}\right.$, (b) $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -7x + y + 1 \\ y' & = & -2x - 5y \end{array}\right.$, (c) $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2tx - y + t\cos(t) \\ y' & = & x + 2ty + t\sin(t) \end{array}\right.$.

Exercice 13. Résoudre l'équation différentielle

$$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0,$$

munie des conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ et $y''(0) = 8$.

Exercice 14. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$ty'' - 2y' - ty = 0,$$

en se ramenant à une équation différentielle du $4^{\text{ème}}$ ordre à coefficients constants.

Exercice 15. On considère l'équation :

$$y' + ay + by^2 = c,$$

où a, b et c sont continues sur $\mathbb{R}$.

(a) Dans le cas où $c = 0$, se ramener à une équation linéaire en posant $z = \dfrac{1}{y}$.

(b) Dans le cas général, montrer que si y_0 est une solution particulière, alors on peut se ramener au premier cas en posant $w = y - y_0$.

(c) *Application :* Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$, en vérifiant d'abord que $y_0 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une solution.

Feuille d'exercices 10
Calcul matriciel et systèmes linéaires

1 - Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants. Préciser dans chaque cas le rang, les inconnues principales et secondaires.

(a) $\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$,

(b) $\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ 3x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$,

(c) $\begin{cases} x + y + 3z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$,

(d) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ x + y - z = -2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$.

Exercice 2. Résoudre les systèmes suivants.

(a) $\begin{cases} x - 2y + 4z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \\ 2x + y - 8z = -1 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + y + 2z = -5 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} 3x + 2y + 6z = 0 \\ 4x + 5y + 12z = 1 \\ 2x + 2y + 5z = 1 \end{cases}$.

Exercice 3. Étudier, suivant les valeurs des paramètres, l'existence de solutions aux systèmes suivants, et les résoudre.

(a) $\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y + z + t = a \\ x - y - z + t = b \\ -x - y + z + t = c \\ -3x + y - 3z - 7t = d \end{cases}$

2 - Opérations matricielles

Exercice 4. Calculer, lorsque cela est possible, les produits AB et BA.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer J^2.

(b) Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on pose $M(z) = xI_2 + yJ$.
Montrer que : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $M(z + z') = M(z) + M(z')$ et $M(zz') = M(z)M(z')$.

(c) Calculer $M(e^{i\theta})^n$, pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'équivalence : $(z \in \mathbb{U}_n) \Leftrightarrow (M(z)^n = I_2)$.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. On veut trouver les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

(a) Si M est une solution, montrer que M commute avec A.

(b) En déduire que certains coefficients de M sont nuls. Conclure.

Exercice 7. Calculer les puissances $n^{\text{èmes}}$ des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3 - Inversion

Exercice 8. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité.

(b) En déduire A^{-1}.

Exercice 9. Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$. Calculer A^4. En déduire A^{-1}.

Exercice 10. Calculer l'inverse, s'il existe, des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Résoudre les systèmes de l'exercice 2 par inversion.

Exercice 12. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(b) Vérifier que $A = PDP^{-1}$.

(c) En déduire les puissances de A.

4 - Transposition et symétrie

Exercice 13. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note $B = {}^tAA$.

(a) Montrer que B est une matrice symétrique.

(b) Montrer que les coefficients diagonaux de B sont positifs.

(c) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = 0$ si et seulement si A est la matrice nulle.

Exercice 14. Soient A et B dans $M_n(\mathbb{K})$ symétriques.
Montrer que AB est symétrique si et seulement si A et B commutent.

Exercice 15. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

(a) Montrer que $I_n + M$ est inversible.

(b) Soit $A = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Montrer que ${}^tA = A^{-1}$.

Exercice 16. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que A n'est pas inversible.

Feuille d'exercices 11
SUITES NUMÉRIQUES

1 - GÉNÉRALITÉS

Exercice 1. Trouver deux suites différentes (u_n) et (v_n) telles que
(a) $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
(b) $\forall N \in \mathbb{N},\ \{u_n \mid n \geq N\} = \{v_n \mid n \geq N\}$.

Exercice 2. Avec des quantificateurs, rappeler les définitions de suite croissante, décroissante, bornée, stationnaire, périodique. Parmi ces propriétés, lesquelles sont vérifiées pour les suites dont les termes généraux sont les suivants ?

(a) $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geq 1$,
(b) $v_n = 2^n$,
(c) $w_n = \cos\left(n\dfrac{\pi}{3}\right)$,
(d) x_n est la $n^{\text{ème}}$ décimale de π,
(e) $y_n = \max(100 - n, 0)$,
(f) $z_n = \min(n - 5, (-1)^n)$.

Exercice 3. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

(a) La suite (u_n) est majorée.
(b) La suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
(c) La suite (u_n) est périodique de période paire.
(d) La suite des termes d'indices pairs de (u_n) est périodique.

2 - SUITES RÉCURRENTES

Exercice 4. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par :

(a) $u_{n+1} = 3u_n + 2,\ u_0 = 0$,
(b) $u_{n+1} = 7u_n - 6,\ u_0 = -1$,
(c) $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n,\ u_0 = 0,\ u_1 = 1$,
(d) $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n,\ u_0 = 2,\ u_1 = -2$,
(e) $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n,\ u_0 = u_1 = 1$,
(f) $u_{n+2} = -u_{n+1} - 2u_n,\ u_0 = 0,\ u_1 = 2$.

Exercice 5.
(a) Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 \in [0, 3[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{x + 6}$. Déterminer la limite éventuelle de (u_n).
(b) Même question pour la suite (v_n) définie par $v_0 \in [0, +\infty[$ et $v_{n+1} = g(v_n)$ avec $g(x) = 1 + \dfrac{x^2}{4}$.
(c) Même question pour la suite (w_n) définie par $w_0 \in]0, +\infty[$ et $w_{n+1} = h(w_n)$ avec $h(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Exercice 6. Soient $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \dfrac{x + 3}{2x}$ et (u_n) la suite définie par $u_0 \in \left]0, \dfrac{3}{2}\right[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer la limite éventuelle de (u_n). Que se passe-t-il si $u_0 \in \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$?

3 - SUITES CONVERGENTES

Exercice 7. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Quelles sont les suites satisfaisant
(a) $\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$?
(b) $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$?

Exercice 8. En revenant à la définition de la limite, montrer que

(a) $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0,

(b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}\right)_{n\geq 2}$ converge vers 0,

(c) $\left(n^4\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$,

(d) $\left(-2\sqrt[3]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Exercice 9.

(a) Écrire avec des quantificateurs l'assertion "(u_n) diverge".

(b) Montrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée et divergente.

(c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $-\infty$. Montrer que (u_n) diverge.

Exercice 10. Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si (u_n) converge, alors (u_n) est stationnaire.

Exercice 11. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$ et λ un réel. Montrer que si $\lambda > 0$, alors $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et si $\lambda < 0$, alors $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Que se passe-t-il si $\lambda = 0$?

Exercice 12. Soit (u_n) une suite bornée. Montrer que si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et que si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 13.

(a) Montrer que si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.

(b) Montrer que si (u_n) tend vers $-\infty$, alors $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$.

Exercice 14. Trouver les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

(a) $u_n = \dfrac{n^3}{n^2+n+1}$,

(b) $v_n = \dfrac{4-n+3n^2}{7-n^2-n^4}$,

(c) $w_n = \dfrac{n^{19}+2}{n^{17}-2n^{19}}$,

(d) $x_n = \dfrac{(2^n+1)(3^n-1)}{6^n-4}$,

(e) $y_n = \dfrac{(6^n+1)((\frac{1}{2})^n+1)}{3^n}$,

(f) $z_n = (2^n-3^n)(n^2-6)$.

Exercice 15. Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

(a) $u_n = \dfrac{e^n}{n\ln(n)}$,

(b) $v_n = n^{\frac{1}{n}}$,

(c) $w_n = (\ln(n))^{\frac{1}{n}}$,

(d) $x_n = \ln\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$,

(e) $y_n = \ln(n+1) - \ln(n)$,

(f) $z_n = n\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 16. On considère une suite (u_n). Est-il vrai que...

(a) si $u_n \neq 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$?

(b) si $u_n \neq 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$?

(c) si $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors (u_n) est convergente ?

(d) si $u_n \neq 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors (u_n) est convergente ?

(e) si $u_n > 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, alors $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$?

(f) si $u_n > 1$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, alors $(u_n)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$?

4 - Théorèmes de convergence

Exercice 17. Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

(a) $v_n = \dfrac{2\sin(n)}{6n+5}$,
(b) $x_n = \dfrac{5n^2 - n\cos(n)}{n^2-7}$,
(c) $w_n = \dfrac{7+2(-1)^n}{n^2}$,
(d) $u_n = \dfrac{5n+2}{3n+\cos(n)}$,
(e) $y_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2+(-1)^n}$,
(f) $z_n = \dfrac{n^3+(-1)^n}{n^2+1}$.

Exercice 18. En utilisant le théorème d'encadrement, trouver les limites de $\left(\dfrac{\sin n}{n+(-1)^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 19. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) suivantes sont adjacentes :

(a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$,
(b) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$,
(c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$.

Exercice 20. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 \le b \le a$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2},\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

(a) Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2}$.
(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \le u_n$.
(c) En déduire que (u_n) est décroissante et (v_n) croissante.
(d) En déduire que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 21.
(a) Soit $a > 0$. Montrer que la suite de terme général $u_n = an$ tend vers $+\infty$.
(b) Montrer que si $u_n \to +\infty$ et si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \le v_n$, alors $v_n \to +\infty$.
(c) Montrer que pour $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \ge 1+an$.
(d) Soit $q > 1$. Déduire de ce qui précède que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

5 - Suites extraites

Exercice 22. Soit (u_n) la suite des décimales de π. Montrer que (u_n) admet une sous-suite convergente.

Exercice 23. Soit (u_n) une suite convergente vers un réel ℓ. Déterminer l'ensemble des limites des suites extraites de la suite $\left(u_n \sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)\right)$.

Exercice 24. Soient (u_n) une suite réelle et ℓ un réel.
(a) Montrer que (u_n) converge vers ℓ si et seulement si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes deux vers ℓ.

(b) À quelle condition sur les extractions φ_1, φ_2 a-t-on l'équivalence

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \iff \big(u_{\varphi_1(n)}\big) \text{ et } \big(u_{\varphi_2(n)}\big) \text{ convergent vers } \ell \text{ ?}$$

Exercice 25. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que (u_{2n}) converge, que (u_{2n+1}) converge et que (u_{3n}) converge. Montrer que la suite (u_n) converge.

6 - Relations de comparaison

Exercice 26. Déterminer un équivalent simple, lorsque $n \to +\infty$, des termes suivants :

(a) $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$,

(b) $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$,

(c) $w_n = \dfrac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln n - 2n^2}$,

(d) $x_n = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$,

(e) $y_n = \operatorname{ch}(n^2)$,

(f) $z_n = \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$.

Exercice 27. Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

(a) $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{2}{n^2}\right)}{\tan\left(\frac{3}{n^2}\right)}$,

(b) $v_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$,

(c) $w_n = \dfrac{\ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{e^{\frac{6}{n}} - 1}$,

(d) $x_n = \dfrac{1 - \cos\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}$,

(e) $y_n = n\sqrt{4 + \dfrac{1}{n}} - 2n$,

(f) $z_n = \dfrac{n^3 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + n}{n+1}$.

Exercice 28. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$.

Exercice 29. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n} + \dfrac{1}{n}$. Montrer que $u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$. A-t-on $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$?

7 - Pour aller plus loin

Exercice 30. Soit $D \geq 2$ un entier (on peut faire l'exercice avec $D = 2$ ou $D = 10$). Soit $f : [0,1[\to [0,1[$ la fonction $f(x) = Dx - \llcorner Dx \lrcorner$, où $\llcorner y \lrcorner$ est la partie entière du réel y. Soient $a \in [0,1[$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite récurrente donnée par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Tracer le graphe de f.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = D^n a - \llcorner D^n a \lrcorner$.

(c) Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$, alors (u_n) est périodique à partir d'un certain rang.

On définit la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall i \in \{0, 1, \dots, D-1\},\ d_n = d_n(a) = i$ si $u_n \in \left[\dfrac{i}{D}, \dfrac{i+1}{D}\right]$.

(d) Montrer que $\forall a \in [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ d_n(f(a)) = d_{n+1}(a)$.

(e) Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{d_k}{D^k} - a\right| < \dfrac{1}{D^N}$.

(f) Montrer que si (u_n) est périodique de période p à partir du rang N_0, alors la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=N_0}^{N_0+np} \frac{d_k}{D^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{Q}$.

(On pourra regrouper dans la somme par paquets de p et identifier une suite géométrique.)

(g) Montrer que (u_n) est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si $a \in \mathbb{Q}$.

Feuille d'exercices 12
POLYNÔMES

1 - L'ENSEMBLE $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1. Déterminer les polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

(a) $Q^2 = XP^2$.

(b) $P \circ P = P$.

Exercice 2.

(a) Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}_3[X]$ tels que $P(X+1) - P(X-1) = X^2 + 1$.

(b) Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P'(X)^2 = 4P(X)$.

(c) Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0$.

2 - DIVISION EUCLIDIENNE DANS $\mathbb{K}[X]$

Exercice 3. Effectuer les divisions euclidiennes de P par Q :

(a) $P = X^3 - 1$, $Q = X + 2$,

(b) $P = 2X^4 + 4X^3 - 5X + 1$,
$Q = 2X^2 + 1$,

(c) $P = 3X^2 + 6X + 5$, $Q = iX + 1 + i$,

(d) $P = X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2$,
$Q = X^2 + (1-i)X + 1 + i$.

Exercice 4. Déterminer les $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tels que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice 5. Soit $(\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division de $(\cos\theta + X \sin\theta)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 6. Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ avec $a \neq b$, et soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

(a) Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.

(b) Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$.

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.

Exercice 8. Soit (n, p) dans $\mathbb{N}^2$.

(a) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^p - 1$.

(b) Montrer l'équivalence : $X^p - 1 \,\big|\, X^n - 1 \Leftrightarrow p \,\big|\, n$.

3 - DÉRIVATION DANS $\mathbb{K}[X]$

Exercice 9. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q' = P$. Montrer qu'un tel polynôme est unique si l'on rajoute la condition supplémentaire $Q(0) = 0$.

Exercice 10. Soit $E = \left\{ Q \in \mathbb{R}[X] \mid \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.

(a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique couple $(Q, \lambda) \in E \times \mathbb{R}$ tel que $P = Q + \lambda$.

(b) On note D l'application $D : \begin{cases} E \to \mathbb{R}[X] \\ Q \mapsto \quad Q' \end{cases}$. Montrer que D est bijective.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P^{(k)}(1) = k$.

4 - RACINES ET FACTORISATION DANS $\mathbb{K}[X]$

Exercice 12. Factoriser les polynômes :

(a) $X^5 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$,

(b) $X^6 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$,

(c) $(X+1)^n - (X-1)^n$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.
Montrer que les racines de P sont simples.

Exercice 14. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul tel que

$$P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0.$$

(a) Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors a^2 et $(a-1)^2$ le sont aussi.

(b) En déduire que si a est une racine de P, alors $a = 0$ ou a est une racine de l'unité.

(c) Montrer que les racines de P appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, -j, -j^2\}$.

(d) Déterminer alors tous les polynômes vérifiant la relation de départ.

Exercice 15. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$.

Exercice 16. Donner une condition sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$.

Exercice 17. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}\,,\ \int_k^{k+1} P(t)\,\mathrm{d}t = k+1\,.$$

Exercice 18. Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ le polynôme $X^3 + 6X + \lambda$ admet-il une racine double ? Déterminer sa factoriation dans ce cas.

Exercice 19. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$.

(a) Si P a n racines distinctes $r_1, \ldots, r_n$, montrer que $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - r_k}$.

(b) Si P a m racines distinctes $r_1, \ldots, r_m$ de multiplicités $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, montrer que $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{X - r_k}$.

Exercice 20. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les racines du polynôme $P_n = (X+1)^n - \mathrm{e}^{2in\alpha}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Feuille d'exercices 13
LIMITES ET CONTINUITÉ

1 - LIMITES

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3-x^3}{4x^2-2x+1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(3x^3+x-2)^2}{(x-1)^6}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^5-1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4x-1}{3x+1}\right)^{2x+3}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x\sqrt{x}+3}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-\ln x}{x+\ln x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}-2\right)$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan 5x}{\sin 2x}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\sin x)\left(\sin\frac{1}{x}\right)$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor}$

Exercice 2. Déterminer des équivalents simples en 0 des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^3}$

(b) $f(x) = \dfrac{e^{\sin x}-1}{\cos x-1}$

(c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{(x+1)^3}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(e) $f(x) = x^{\sin x}-1$

(f) $f(x) = \cos\sqrt{x}-1$

(g) $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)}-\sqrt{|\ln x|}$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique admettant une limite l en $+\infty$. Montrer que l est finie et que f est la fonction constante égale à l.

Exercice 4. Donner un équivalent simple en $+\infty$ et en 0 de :

(a) $\dfrac{x^2+6x-5}{7x^2-2x-3}$,

(b) $2^{3x}+3^{2x}$,

(c) $x^2 2^x - \dfrac{3^x}{x^3}$,

(d) $\sqrt{x^2+5}$,

(e) $\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$,

(f) $e^{2x^2-3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^4}}$,

(g) $x^2\ln(x)^3 - x^3\ln(x)^2$,

(h) $e^{\frac{1}{x}}x^5\ln(x) - e^x x^4\ln(x)^2$,

(i) $\dfrac{x^2+\ln(x)}{x^2\ln(x)}$.

Exercice 5. Soit $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(a) Soit $l\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Si $f(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$ et $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, alors $g(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$.

(b) Soit $l\in\mathbb{R}$. Si $f(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$ et $g(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$, alors $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$.

(c) Si $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim} 5x$, alors $f(x)-5x\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(d) Si $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, alors $e^{f(x)}\underset{x\to x_0}{\sim} e^{g(x)}$.

Exercice 6. Soit f une fonction polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe $d\in\mathbb{N}$ et $(a_0,a_1,\dots,a_d)\in\mathbb{R}^{d+1}$ tels que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_dx^d$. Montrer qu'il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel f est monotone.

Exercice 7. Soit $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. On suppose que $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ et que $g(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l\in\left(\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}\right)$, avec $l\neq 1$. Montrer que $\ln f(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\ln g(x)$. Est-ce encore vrai pour $l=1$?

Indication : On pourra montrer que $\dfrac{\ln f(x)}{\ln g(x)}-1=\dfrac{\ln\frac{f(x)}{g(x)}}{\ln g(x)}$.

2 - Continuité en un point

Exercice 8. Prolonger par continuité les fonctions suivantes, lorsque c'est possible :

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{4}{x^2-2x-3}$

(c) $f(x) = \dfrac{\ln(4x^2-1)}{\ln(2x-1)}$

(d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sin \dfrac{1}{x}$

(e) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

(f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\tan x - 1}$

(g) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(h) $f(x) = x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(i) $f(x) = \sin(1+x)\ln|1+x|$

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 10. Donner le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \arctan(\tan^2(x))$, et montrer qu'elle est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues en 0, telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)\cos(x)$.

Exercice 12. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in]0,1[,\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si} \quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Montrer que f est discontinue en tout point rationnel, et continue en tout point irrationnel.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Montrer que f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

3 - Continuité sur un intervalle

Exercice 14. Étudier la continuité de $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \end{cases}$.

Exercice 15. Soit k un réel strictement positif et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

Montrer que f est continue.

Exercice 16. Soient $a < b$ des réels et $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 17. Soient $a < b$ des réels. Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ continues. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g.$$

Exercice 18. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

Exercice 19. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si f prend un nombre fini de valeurs, alors f est constante.

Exercice 20. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et : $\forall x \in [0,1],\ f \circ f(x) = x$. Déterminer f.

Exercice 21. Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant les équations suivantes :

(a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = f(x)$,

(b) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x)$,

(c) $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = f(x)$,

(d) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$,

(e) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y)$,

(f) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$.

Feuille d'exercices 14
DÉRIVABILITÉ

1 - DÉRIVABILITÉ

Exercice 1. Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$, (b) $f : x \mapsto \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

Exercice 2. Déterminer les ensembles de définition, de dérivabilité, et la dérivée des fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto \dfrac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-1}$,

(b) $g : x \mapsto (\cos x)^{\sin x}$,

(c) $h : x \mapsto \arccos\sqrt{1-x^2}$,

(d) $i : x \mapsto \ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$,

(e) $j : x \mapsto \arctan \operatorname{sh} x$,

(f) $k : x \mapsto \ln|\tan x|$,

(g) $l : x \mapsto \arcsin(1-x^2)$,

(h) $m : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$,

(i) $n : x \mapsto \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 3. Étudier le prolongement par continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto x^x$,

(b) $g : x \mapsto x\ln|x|$,

(c) $i : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$,

(d) $j : x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

Exercice 4. Soit $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{\sin x} + x$.

(a) Justifier que f réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle J à préciser.

(b) Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur $J \setminus \{0\}$, puis en 0.

2 - PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉRIVABLES

Exercice 5. Majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :

(a) $\sqrt{10001} \simeq 100$,

(b) $\dfrac{1}{0,999^2} \simeq 1$,

(c) $\cos 1 \simeq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de classe C^1. Montrer que f' est périodique, et en déduire que f est lipschitzienne.

Exercice 7. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$. Montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et admettant la même limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ et $-\infty$. En considérant la fonction $g = f \circ \tan$, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 9. Soient $a, b > 0$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que la tangente à Γ_f en c passe par l'origine.

Exercice 10. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivables. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$.
Montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Exercice 11. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 12. Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ |e^{ib} - e^{ia}| \leq |b-a|$.

3 - Fonctions de classe C^n

Exercice 13. Calculer les dérivées successives de :

(a) $f : x \mapsto (x^2+1)e^{3x}$,
(b) $g : x \mapsto \cos^3 x$,
(c) $h : x \mapsto e^x \sin x$,
(d) $i : x \mapsto (x^3+x^2+1)e^{-x}$,
(e) $j : x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$,
(f) $k : x \mapsto \ln(2-3x)$.

Exercice 14. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ ax^2+bx+c & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

soit de classe C^2. Est-elle alors de classe C^3 ?

Exercice 15. Déterminer les classes des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

(a) $f(x) = \begin{cases} x^n & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$,
(b) $g(x) = \begin{cases} x^3 \ln x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$,
(c) $h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$,
(d) $i(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

Exercice 16. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$ est de classe C^∞.

Exercice 17. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n fois dérivable. Montrer que si

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f(b) = 0,$$

alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 18. Soit f une fonction polynomiale. Montrer que l'équation $f(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions.

4 - Fonctions convexes

Exercice 19. Montrer que la fonction $\ln \circ \ln$ est concave sur $]1, +\infty[$.
En déduire que : $\forall a, b > 1,\ \ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

Exercice 20. Montrer que : $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n > 0,\ \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Exercice 21. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
En déduire que : $\forall a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0,\ \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 22. Soient $p, q \geq 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que : $\forall x, y > 0,\ xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.
En déduire que : $\forall a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0,\ \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

Feuille d'exercices 15
ESPACES VECTORIELS

1 - ESPACES VECTORIELS

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des (sous-)espaces vectoriels ?

(a) $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 0\}$,
(b) $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}$,
(c) $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$,
(d) $E_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones$\}$,
(e) $E_5 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 0\}$,
(f) $E_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \in \mathbb{Q}\}$,
(g) $E_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$,
(h) $E_8 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornées$\}$,
(i) $E_9 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergentes$\}$,
(j) $E_{10} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}$.

Exercice 2. On considère les vecteurs $u = (2,3)$ et $v = (1,-5)$ de $\mathbb{R}^2$.
(a) Montrer que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
(b) Exprimer u et v en fonction des vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.
(c) Exprimer e_1 et e_2 en fonction de u et v.
(d) Faire de même avec les vecteurs $u = (2,3,0)$, $v = (1,-5,0)$ et $w = (-1,0,4)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. On considère les vecteurs $u = (2,3,-1)$, $v = (1,-1,-2)$ et $w = (5,0,-7)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(v,w)$.

2 - SOUS-ESPACES VECTORIELS

Exercice 4. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ? Si oui, les écrire sous forme Vect.

(a) $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$,
(b) $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 2\}$,
(c) $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = x+y+z = 0\}$,
(d) $E_4 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ géométrique de raison $2\}$,
(e) $E_5 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + d = 0\}$,
(f) $E_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$,
(g) $E_7 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0\}$,
(h) $E_8 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = 2z = 4t\}$,
(i) $E_9 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2) = 0\}$,
(j) $E_{10} = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel, puis F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 6. On considère les ensembles $A = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(0,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$.
(a) Montrer que A et B sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
(b) Écrire les vecteurs $u = (1,2,1)$ et $v = (2,3,-1)$ sous la forme $a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$.
(c) Faire de même avec $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}$ et $B = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 7. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants : $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$ et $v_5 = (0,1,0,1)$. Les sous-espaces vectoriels suivants sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

(a) $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $\mathrm{Vect}(v_3)$,
(b) $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $\mathrm{Vect}(v_4, v_5)$,
(c) $\mathrm{Vect}(v_1, v_3, v_4)$ et $\mathrm{Vect}(v_2, v_5)$,
(d) $\mathrm{Vect}(v_1, v_4)$ et $\mathrm{Vect}(v_3, v_5)$.

Exercice 8. Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $G = \{P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E. Déterminer la décomposition correspondante de X^3, X^2, X et 1.

Exercice 9. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants : $v_1 = (0,1,-2,1)$, $v_2 = (1,0,2,-1)$, $v_3 = (3,2,2,-1)$, $v_4 = (0,0,1,0)$ et $v_5 = (0,0,0,1)$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(a) $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Vect}(v_4, v_5)$,
(b) $(1,1,0,0) \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \cap \mathrm{Vect}(v_2, v_3, v_4)$,
(c) $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) \cap \mathrm{Vect}(v_3, v_4) = \{0\}$,
(d) $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) + \mathrm{Vect}(v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^4$,
(e) $\mathrm{Vect}(v_4, v_5)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

3 - Familles libres, familles génératrices

Exercice 10. Trouver une famille génératrice des sous-espaces vectoriels suivants :

(a) $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\right\}$,
(b) $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = y - z = 0\right\}$,
(c) $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y + z - 5t = 0\}$,
(d) $I = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y = z + 3t = 0\}$.

Exercice 11. Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$?

(a) $((1,2,3),(-1,4,6))$,
(b) $((1,2,-1),(1,0,1),(0,0,1))$,
(c) $((1,2,-1),(1,0,1),(-1,2,-3))$,
(d) $((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9))$.

Exercice 12. Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

(a) $\left(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}\right)$,
(b) $\left(x \mapsto 1, \cos, \cos^2, x \mapsto \cos(2x)\right)$,
(c) $(x \mapsto 3x - 5, x \mapsto 2x + 3, x \mapsto 5x - 7)$,
(d) $(\cos, \sin, x \mapsto x\cos x, x \mapsto x \sin x)$.

Exercice 13. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u = (1,1,0)$, $v = (4,1,4)$ et $w = (2,-1,4)$. Montrer que les familles (u,v), (v,w) et (u,w) sont libres. La famille (u,v,w) est-elle libre ?

Exercice 14. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et (u_1,u_2,u_3,u_4) une famille libre de vecteurs de E. Les familles suivantes sont-elles libres ?

(a) $(u_1, 2u_2, u_3)$,
(b) (u_1, u_3),
(c) $(3u_1 + u_3, u_3, u_2 + u_3)$,
(d) $(2u_1 + u_2, u_1 - 3u_2, u_4, u_2 - u_1)$.

Exercice 15. Comparer les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ suivants : $F = \mathrm{Vect}\left((1,0,1,1),(-1,-2,3,-1),(-5,-3,1,5)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left((-1,-1,1,-1),(4,1,2,4)\right)$.

Exercice 16. Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

(a) $((1,-1,0),(2,-1,2))$,
(b) $((1,-1,0),(2,-1,2),(1,0,a))$ où $a \in \mathbb{R}$,
(c) $((1,1,3),(3,4,5),(-2,5,7),(8,-1,9))$,
(d) $((1,1,a),(1,a,1),(a,1,1))$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 17. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

(a) $E = \{P \in \mathbb{C}_4[X] \mid P(a) = P(b) = 0\}$ où $(a,b) \in \mathbb{C}^2$,
(b) $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n\}$,
(c) $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$,
(d) $H = S_n(\mathbb{R})$,
(e) $I = A_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18. Soient $u = (1,-1,2)$, $v = (1,1,-1)$ et $w = (-1,-5,-7)$. Soient $F = \mathrm{Vect}(u,v,w)$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Donner une base de F, de G et de $F \cap G$.

Feuille d'exercices 16
Applications linéaires

1 - Premiers pas

Exercice 1. Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :
(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - 2y, 0)$,
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - 2y, 1)$,
(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$,
(d) $f : \mathbb{K}_2[X] \to \mathbb{K}$ définie par $f(P) = P(2)$,
(e) $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 4f$,
(f) $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = 2ff'$,
(g) $f : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^3$ définie par $f((u_n)) = (u_0, u_1, u_2)$,
(h) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2y - z, x + z)$,
(i) $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a + d$.
(j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 2x$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(1, 0, 0) = (-2, 0, 2), \quad f(0, 1, 0) = (0, 3, 0), \quad f(0, 0, 1) = (-4, 0, 4).$$

Déterminer, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z)$.

Exercice 3. On considère les vecteurs $u = (1, 1)$, $v = (2, -1)$ et $w = (1, 4)$ de $\mathbb{R}^2$.
(a) Montrer que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
(b) Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(u) = (2, 1)$, $f(v) = (1, -1)$ et $f(w) = (5, a)$ est-elle linéaire ? Déterminer f dans ce(s) cas.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (y, -x-y)$. Montrer que f est linéaire, et calculer $f \circ f \circ f$. En déduire que f est un isomorphisme, et déterminer sa réciproque.

2 - Image et noyau

Exercice 5. Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires suivantes :
(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y, x + y)$,
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$,
(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-2x + y + z, x - y, x - 2y + z)$,
(d) $\varphi : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f' - 4f$,
(e) $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ définie par $f(P) = P'$,
(f) $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M + {}^tM$,
(g) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$,
(h) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + i\overline{z}$,
(i) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = P - (X + 1)P'$,
(j) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y, x + 2ay, z)$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $F = \text{Vect}\,((1,0,0),(1,1,1))$. Déterminer un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de noyau F.

Exercice 7. On considère l'application f de l'exercice **??**.

(a) Déterminer une base de $\text{Ker}\, f$, puis de $\text{Im}\, f$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

(b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}\, f \oplus \text{Im}\, f$.

(c) Montrer que pour l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(1,0,0) = (-2,-1,-2), \quad f(0,1,0) = (4,0,4), \quad f(0,0,1) = (4,1,4),$$

on a $\text{Ker}\, f \cap \text{Im}\, f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Exercice 8. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+2y, 4x-y, -2x+2y+3z)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, et déterminer sa réciproque.

Exercice 9. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$. Existe-t-il $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ de noyau F ?

Exercice 10. Soient E, F, G des espaces vectoriels, puis $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

(a) Montrer que $g \circ f$ est nulle si et seulement si $\text{Im}\, f \subset \text{Ker}\, g$.

(b) Montrer que $\text{Ker}\, f \subset \text{Ker}\, g \circ f$ et que $\text{Im}\, g \circ f \subset \text{Im}\, g$.

(c) En déduire que si $g \circ f$ est un isomorphisme, alors f est injective et g est surjective.

Exercice 11. Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\text{Ker}\, f = \text{Ker}\, f^2 \Leftrightarrow \text{Ker}\, f \cap \text{Im}\, f = \{0_E\} \qquad \text{et} \qquad \text{Im}\, f = \text{Im}\, f^2 \Leftrightarrow \text{Ker}\, f + \text{Im}\, f = E.$$

3 - Projecteurs, symétries, homothéties

Exercice 12. Déterminer l'expression :

(a) du projecteur p de $\mathbb{R}^2$ sur $F = \text{Vect}((0,1))$ parallèlement à $G = \text{Vect}((1,1))$,

(b) de la symétrie s de $\mathbb{R}^2$ par rapport à F parallèlement à G,

(c) de la symétrie s de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $F = \text{Vect}((1,2,3))$ parallèlement à $G = \text{Vect}((1,0,0),(1,1,0))$,

(d) du projecteur p de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F.

Exercice 13. Déterminer si les applications suivantes sont des projecteurs ou des symétries, et déterminer leurs éléments caractéristiques :

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x, -2x-y)$,

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+y-z, x+y-z, x+y-z)$,

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (-x+2z, -x+y+z, z)$,

(d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = \dfrac{1}{2}(x-z, 2y, -x+z)$,

(e) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = R$, reste de la division euclidienne de P par $Q \in \mathbb{R}[X]$ fixé.

Exercice 14. Soient $p \in \mathcal{L}(E)$ et $q = \text{Id}_E - p$.

(a) Montrer que p est un projecteur si et seulement si q est un projecteur.

(b) On suppose que p est un projecteur. Montrer que $\text{Im}\, p = \text{Ker}\, q$ et que $\text{Ker}\, p = \text{Im}\, q$.

Exercice 15. Soient p et q des projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que

$$\text{Ker}\, p = \text{Ker}\, q \Leftrightarrow (p \circ q = p \text{ et } q \circ p = q) \qquad \text{et} \qquad \text{Im}\, p = \text{Im}\, q \Leftrightarrow (p \circ q = q \text{ et } q \circ p = p).$$

Exercice 16. Soient p et q des projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$, et qu'alors $\text{Im}(p+q) = \text{Im}\, p \oplus \text{Im}\, q$ et $\text{Ker}(p+q) = \text{Ker}\, p \cap \text{Ker}\, q$.

Exercice 17. Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E,\ \exists \lambda_x \in \mathbb{K},\ f(x) = \lambda_x x$. Montrer que f est une homothétie.

Feuille d'exercices 17
DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

1 - FORMULES DE TAYLOR

Exercice 1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour $f(t) = \sqrt{t}$ entre $a = 100$ et $b = 101$. En déduire une approximation décimale de $\sqrt{101}$ à 10^{-6} près.

Exercice 2. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 pour la fonction $\cos$ sur $[0, x]$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^4}{4!}\right| \leq \dfrac{x^6}{6!}$, puis une approximation rationnelle de $\cos(0,1)$ à 10^{-8} près.

Exercice 3. Montrer que $\forall x > 0$, $1 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}x^2 < \sqrt[3]{1+x} < 1 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}x^2 + \dfrac{5}{81}x^3$.
En déduire une valeur approchée de $\sqrt[3]{1,03}$ à 10^{-5} près.

Exercice 4. Montrer que : $\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} < \ln(1+x) < \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$.
En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

Exercice 5. Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}. Soit $x_0 \in I$. Montrer que : $\forall x \in I$,
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

2 - OPÉRATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Exercice 6. Donner les DL_2, DL_4, DL_{10} et DL_{2024} en 0 de $f(x) = x^{58} + 2x^{12} + 5x^{10} + x^3$.

Exercice 7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Jusqu'à quel ordre la fonction x^α admet-elle un développement limité en 0 ?

Exercice 8. En posant $y = x - 2$, déterminer les DL_4 en 2 des fonctions e^x, $\sqrt{1+x}$ et $\ln(1+x)$.

Exercice 9. Déterminer les développements limités suivants :

(a) DL_3 en 0 de $\dfrac{1}{1+x} + \sqrt[3]{1+x}$,
(b) DL_6 en 0 de $\mathrm{sh}^2(x)$,
(c) DL_3 en 0 de $\cos(x)\ln(1+x)$,
(d) DL_6 en 0 de $(1 - \mathrm{ch}(x))\sin(x)$,
(e) DL_8 en 0 de $\sqrt{1+x^2}\ln(1+x^3)$,
(f) DL_5 en $\dfrac{\pi}{3}$ de $\cos x$.

Exercice 10.
(a) Rappeler l'expression de la dérivée de $\arctan$.
(b) En déduire un DL en 0 à tout ordre de $\arctan$.
(c) Déterminer de même un DL en 0 à tout ordre de $\arcsin$.

Exercice 11. La fonction $\dfrac{1}{1+|x|^3}$ admet-elle un DL_2 en 0 ? un DL_3 en 0 ? un DL_4 en 0 ?

Exercice 12. Déterminer les développements limités suivants :

(a) DL_3 en 0 de $\dfrac{1+x}{2+x}$,
(b) DL_3 en 0 de $\mathrm{th}(x)$,
(c) DL_5 en $\dfrac{\pi}{4}$ de $\tan(x)$,
(d) DL_4 en 0 de $\dfrac{x\cos x}{\sin x}$,
(e) DL_5 en 0 de $\cos^3 x$,
(f) DL_4 en 0 de $\sqrt[3]{1+\cos x}$,
(g) DL_4 en 0 de $\ln(1+\sin x)$,
(h) DL_2 en 0 de $e^{\sqrt{1+x}}$,
(i) DL_4 en 0 de $\cos(x)^{\sin(x)}$,
(j) DL_4 en 0 de $\sin(x-x^2)$,
(k) DL_5 en 0 de $\arctan(x)$,
(l) DL_5 en 0 de $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$,
(m) DL_5 en 0 de $\arccos(x)$.

3 - Utilisations des développements limités

Exercice 13. Déterminer les dérivées $n^{\text{èmes}}$ en 0 de la fonction $\arcsin$.

Exercice 14. Déterminer la limite en 0 de

(a) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}$,
(b) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$,
(c) $\dfrac{1}{x^2}-\mathrm{cotan}^2 x$,
(d) $\dfrac{e^x}{\mathrm{sh}x}-\dfrac{e^{-x}}{\sin x}$,
(e) $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{1-\cos 2x}$,
(f) $\dfrac{\tan x-\arcsin x}{\sin x-\arctan x}$,
(g) $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1+x)}$,
(h) $\dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}}$.

Exercice 15. Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{\ln(1+x)-\tan x+\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2\sin^2 x}$.

Exercice 16. Donner la tangente et la position par rapport à la tangente en x_0 des fonctions suivantes. Y a-t-il un extremum local en x_0 ?

(a) $\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{x}{4}$ en $x_0=0$,
(b) $\dfrac{2+x+2x^2}{1+x^2}$ en $x_0=0$,
(c) $\dfrac{3\ln(1+x)-\ln(1+x^3)}{3x}$ en $x_0=0$,
(d) $x+2\sqrt{x}-\sqrt{3+x}$ en $x_0=1$,
(e) $\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$ en $x_0=1$,
(f) x^α en $x_0>0$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 17. Tracer les graphes des fonctions $1+\sin x$, e^x, $\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$, et leurs tangentes en 0.

Exercice 18. Déterminer les développements asymptotiques suivants :

(a) $x^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\sqrt{x}}$ en 0,
(b) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ en $+\infty$,
(c) $\dfrac{1}{x+\ln x}$ en $+\infty$.

Exercice 19. Donner une asymptote en $+\infty$ et la position par rapport à l'asymptote de

(a) $\sqrt{x(2+x)}e^{\frac{1}{x}}$,
(b) $(x^3+x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}$,
(c) $\ln(e^{x^2}-e^x-1)$.

Exercice 20. Soit $f:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x+\ln x$.
(a) Montrer que $f:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ est une bijection continue croissante.
(b) Montrer que $f^{-1}(y)\underset{y\to+\infty}{\sim} y$.
(c) Montrer que $f^{-1}(y)=y-\ln y+\dfrac{\ln y}{y}+\underset{y\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln y}{y}\right)$.

Feuille d'exercices 18
PROBABILITÉS

1 - ESPACES PROBABILISÉS

Exercice 1. On lance deux dés à 6 faces. Donner la probabilité de chacun des événements suivants :

(a) Les deux dés affichent la même valeur.
(b) On obtient un double 6.
(c) Au moins l'un des deux dés donne 6.
(d) Un seul dé donne 6, ou les deux donnent 3.
(e) La somme des résultats vaut 4.
(f) Les deux chiffres sont de parités opposées.

Exercice 2. Dix paires de chaussures différentes sont rangées dans un placard. On prend au hasard 4 chaussures. Quelle est la probabilité :
(a) d'obtenir deux paires de chaussures ?
(b) d'obtenir au moins une paire de chaussures ?
(c) d'obtenir une et une seule paire de chaussures ?

Exercice 3. Un dé est truqué pour que la probabilité d'obtenir $k \in [\![1, 6]\!]$ soit proportionnelle à k. Déterminer un espace probabilisé modélisant ce lancer.

Exercice 4. La probabilité de gagner au Loto est de $\frac{1}{N}$, où N est un grand entier. En jouant N fois au Loto, quelle est la probabilité de gagner au moins une fois ? Déterminer la limite de cette probabilité quand $N \to +\infty$.

Exercice 5. Quelle est la probabilité qu'au moins 2 élèves d'une classe de 45 aient la même date d'anniversaire ?

Exercice 6. Au bout de combien de lancers d'un dé équilibré à 6 faces aura t-on au moins une chance sur deux d'avoir obtenu un 6 ? Même question avec deux dés pour obtenir un double 6.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue un tirage simultané de p boules dans l'urne.
(a) Soit $k \in [\![p, n]\!]$, et A_k l'événement « le plus grand numéro qui a été tiré est k ». Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.
(b) En déduire la formule : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.

2 - PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Exercice 8. Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.
(a) Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure à l'intérieur du tirage ?
(b) Sachant qu'au moins une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

Exercice 9. Une forêt comporte 30% de chênes, 50% de hêtres et 20% de peupliers. Une maladie se déclare, qui touche 10% des chênes, 25% des hêtres et 4% des peupliers. Étant donné un arbre malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne ?

Exercice 10. Le bon fonctionnement d'un appareil obéit à la règle suivante : s'il fonctionne au jour $j \in \mathbb{N}$, alors il y a une probabilité $a \in]0,1[$ qu'il tombe en panne au jour $j+1$. S'il est en panne au jour $j \in \mathbb{N}$, alors il y a une probabilité $b \in]0,1[$ qu'il soit réparé au jour $j+1$. On suppose que l'appareil fonctionne au jour 0. Déterminer la probabilité p_j qu'il fonctionne au jour $j \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. On considère N coffres. Avec une probabilité p, un trésor a été placé dans l'un de ces coffres. On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Exercice 12. Au cours d'un procès, deux jurés doivent, indépendamment l'un de l'autre, déclarer si un accusé est coupable ou non coupable. On suppose que la probabilité que l'accusé soit coupable est de 60%. S'il est coupable, alors la probabilité pour chaque juré de le déclarer coupable est de 70% ; s'il est non coupable, alors la probabilité pour chaque juré de le déclarer coupable est de 20%.
L'accusé est déclaré coupable par les deux jurés. Quelle est la probabilité qu'il soit non coupable ?

Exercice 13. Une compagnie d'assurances répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques (20% des clients), les risques moyens (50%), et les mauvais risques (30%). Les statistiques indiquent que la probabilité pour un client d'avoir un accident au cours de l'année est, selon sa classe, de $0,05$, $0,15$ ou $0,30$ respectivement.

(a) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?

(b) Si un client n'a pas eu d'accident dans l'année, quel est la probabilité qu'il soit dans la classe R_1 ?

Exercice 14. On s'intéresse à la survie d'une espèce. On suppose que chaque individu de cette espèce a 3 enfants avec la probabilité $\frac{1}{8}$, 2 avec la probabilité $\frac{3}{8}$, 1 avec la probabilité $\frac{3}{8}$, et aucun avec la probabilité $\frac{1}{8}$. À l'instant initial, la population est composée d'un seul individu. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité pour que l'espèce disparaisse en n générations. Déterminer p_{n+1} en fonction de p_n, et déterminer la limite de la suite (p_n).

3 - Événements indépendants

Exercice 15. Un jeu de 52 cartes comporte 13 cœurs et 4 dames, dont la dame de cœur. On pioche une carte dans le jeu. Les événements « on obtient un cœur » et « on obtient une dame » sont-ils indépendants ? Et si on enlève le roi de trèfle du jeu ?

Exercice 16. On jette deux dés. Soient A l'événement « le premier dé donne 2 » et B l'événement « la somme des dés est égale à 6 ». Les deux événements sont-ils indépendants ?

Exercice 17. On lance n fois une pièce truquée, où la probabilité d'obtenir pile est $\frac{1}{3}$. Quelle est la probabilité d'obtenir le premier face au $n^{\text{ème}}$ lancer ?

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en facteurs premiers. On note $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $\Omega = \{1, \dots, n\}$.

(a) Soient d un diviseur de n et $M(d)$ l'ensemble de ses multiples dans Ω. Calculer $\mathbb{P}\big(M(d)\big)$.

(b) On note A l'ensemble des entiers de Ω premiers avec n. Montrer que $A = \bigcap_{k=1}^{r} \overline{M(p_k)}$.

(c) Déterminer le nombre $\varphi(n)$ d'entiers de Ω premiers avec n.

Feuille d'exercices 19
DIMENSION

1 - ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u=(1,0,2)$, $v=(1,1,2)$, $w=(1,2,2)$, $t=(2,2,2)$. Montrer que la famille (u,v,w,t) est génératrice de $\mathbb{R}^3$, et en extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $u=(1,1,1,1)$ et $v=(1,1,-1,-1)$. Montrer que la famille (u,v) est libre, et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3. Dans $E=\mathbb{R}^4$, soient $u=(1,-1,-1,-1)$, $v=(2,0,2,0)$ et $w=(-1,-1,2,-1)$.
(a) Montrer que la famille $\mathcal{F}=(u,v,w)$ est libre.
(b) Soit $G=\{(x,y,z,t)\in E \mid y=t\}$. Montrer que $G=\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
(c) Compléter $\mathcal{F}$ en une base de E.

Exercice 4. Soient E et F deux espaces de dimensions finies n et p. Soient $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $(f_1,\dots,f_p)$ une base de F.
(a) Montrer que la famille $\mathcal{F}=((e_1,0_F),\dots,(e_n,0_F),(0_E,f_1),\dots,(0_E,f_p))$ est une base de $E\times F$.
(b) En déduire la dimension de $E\times F$.

2 - DIMENSION ET SOUS-ESPACES VECTORIELS

Exercice 5. Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

(a) $E_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x-3y=0\}$,
(b) $E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+3z=0\}$,
(c) $E_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-z=x+y+z=0\}$,
(d) $E_4=\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}) \mid a+d=0\}$,
(e) $E_5=\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ géométrique de raison $2\}$,
(f) $E_6=\{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid P(1)=P(2)=0\}$,
(g) $E_7=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x=0\}$,
(h) $E_8=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x=y=2z=4t\}$.

Exercice 6. Dans $E=\mathbb{R}^4$, on pose $u=(1,2,1,0)$, $v=(0,1,2,1)$, puis $F=\mathrm{Vect}(u,v)$ et $G=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-y=t-z$ et $x-z+2t=0\}$. Montrer que $F=G$.

Exercice 7. Dans $E=\mathbb{R}^4$, soient $F=\{(x,y,z,t)\in E \mid x+3y+4z-5t=0\}$ et $G=\mathrm{Vect}\left((-2,2,0,3)\right)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 8. Dans $M_n(\mathbb{K})$, soient S et A respectivement le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et celui des matrices antisymétriques.
(a) Déterminer les dimensions de S et A.
(b) Montrer que S et A sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On appelle *hyperplan* de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.
(a) Soit H un hyperplan de E, et soit $u_0\in E\setminus H$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u_0)$ est un supplémentaire de H dans E.
(b) Soient H et H' deux hyperplans de E non confondus. Montrer que $\dim(H\cap H')=n-2$.

Exercice 10. Déterminer les dimensions du noyau et l'image des applications linéaires suivantes :
(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$,
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x-y, -3x+3y)$,
(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (-2x+y+z, x-y, x-2y+z)$,
(d) $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M + {}^tM$,
(e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(x,y,z) = (x+z, y-x, z+y, x+y+2z)$,
(f) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + i\overline{z}$,
(g) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = P - (X+1)P'$,
(h) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+y, x+2ay, z)$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ définie par : $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f(x_1, \ldots, x_n) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$. Déterminer le rang de f puis de $g = \mathrm{Id} - f$.

Exercice 12. Soit φ l'application définie, pour toute fonction $y \in C^2(\mathbb{R})$, par $\varphi(y) = y'' - 4y' + 20y$.
(a) Montrer que φ est une application linéaire de $C^2(\mathbb{R})$ dans $C^0(\mathbb{R})$.
(b) Déterminer le noyau de φ.
(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n, et soit $\psi : E \to E$ définie par : $\forall y \in E,\ \psi(y) = \varphi(y)$. Justifier que ψ est bien définie, et montrer que c'est un automorphisme de E.

Exercice 13. Soit u un endomorphisme de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u^2 = \lambda u$.

Exercice 14. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $f \circ f = 3f - 2\mathrm{Id}_E$.
(a) Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et que $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.
(b) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 15. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que :

$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

Exercice 16. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrer que n est pair.

Exercice 17. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.
(a) Montrer que n est pair si et seulement s'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$.
(b) Montrer dans ce cas que, pour un tel u, il existe une base de E de la forme $(e_1, \ldots, e_p, u(e_1), \ldots, u(e_p))$.

Exercice 18. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, puis F et G des sous-espaces vectoriels de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}(u) = F$ et $\mathrm{Ker}(u) = G$.

Feuille d'exercices 20
Matrices et applications linéaires

1 - Matrice d'une application linéaire

Exercice 1. Déterminer les matrices dans les bases canoniques respectives des applications linéaires suivantes :

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+3y, 2y) \end{array} \right.$,

(b) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-x+2z, 3x-4y, -5x+6z, -7y+8z) \end{array} \right.$,

(c) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array} \right.$,

(d) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

(e) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$.

Exercice 2. Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les matrices de $f+g$, de $f \circ g$, de $g \circ f$ et, si possible, de f^{-1} et g^{-1} dans la base canonique.

Exercice 3. Déterminer les matrices dans les bases canoniques respectives des applications linéaires suivantes. Montrer que ce sont des isomorphismes, et déterminer les matrices de leurs applications réciproques :

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3)) \end{array} \right.$,

(b) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array} \right.$,

(c) $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f' - f \end{array} \right.$, $E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$,

(d) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MA \end{array} \right.$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2 - Changements de bases

Exercice 4. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = ((1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Déterminer les coordonnées de $u = (2,1,-3,4)$ dans cette base.

Exercice 5. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est :

$$M = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$, et calculer la matrice de f dans cette base.

Exercice 6.

(a) On note $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice P est une matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à une autre base $\mathcal{B}$.

(b) On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x, y, z) = (2x+2y+z, -2x-y, x+y-z)$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{B}$. En déduire $f \circ f \circ f$.

Exercice 7. Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(a, b, c) = \int_0^2 \frac{ax^2 + bx + c}{(x+1)(x-3)} dx,$$

et $\mathcal{B} = ((0, 1, 1), (0, 1, -3), (1, -2, -3))$.

(a) Montrer que f est linéaire et que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer $f(\mathcal{B})$ et la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique.

(c) En déduire $f(a, b, c)$ pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

3 - Rang d'une matrice

Exercice 8. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & c & 2 \\ 2 & c & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Soient $u_1 = (2, 1, -1)$, $u_2 = (2, -1, 1)$ et $u_3 = (0, 2, 2)$.

(a) Vérifier que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer $f(u_3) + 5u_2$. En déduire la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.

(c) Déterminer le rang de f et une base de $\mathrm{Ker} f$. Déterminer f^3.

Exercice 10. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ du projecteur sur le plan d'équation $x + y - z = 0$ parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}\,((1, 1, 1))$.

Exercice 11. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'un coefficient non nul.

Exercice 12. Montrer que la matrice $S = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 6 & 7 & 6 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une symétrie. En déterminer les éléments caractéristiques.

Feuille d'exercices 21
INTÉGRATION

1 - PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

Exercice 1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto \displaystyle\int_2^{2x} \ln t \, dt$,

(b) $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$,

(c) $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt$,

(d) $f : x \mapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\sqrt{x}} \frac{tdt}{1+t^4}$.

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} \cos(t^2) dt$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \int_{x}^{2x} \frac{dt}{(\ln t)^2}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_{x}^{2x} \frac{e^t}{t} dt$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \int_{x}^{2x} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} dt$.

Exercice 3. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t+i}$.

Exercice 4. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x E(t)dt$, où E désigne la partie entière, et montrer que la fonction F est continue.

Exercice 5. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\displaystyle\int_0^1 f = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 6. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 7. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt = \int_0^1 tf(t)\, dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $]0,1[$.

Exercice 8. Soient $1 < a < b$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \cos(nt^2) dt$.

Exercice 9. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et positive. Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \left(\displaystyle\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et positive, telle qu'il existe $k \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \leq k \int_0^x f(t)dt.$$

Montrer que f est nulle.

2 - Sommes de Riemann

Exercice 11. En utilisant les sommes de Riemann, calculer $\displaystyle\int_1^3 t^2 dt$.

Exercice 12. Sans utiliser de primitive, calculer $\displaystyle\int_0^x \cos t\, dt$ et $\displaystyle\int_0^x \sin t\, dt$.

Exercice 13. Déterminer les limites des suites suivantes :

(a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3k+n}$,

(b) $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \ldots + \sqrt[n]{2^n}\right)$,

(c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$,

(d) $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

3 - Formules de Taylor

Exercice 14.

(a) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral en $x = 0$ à l'ordre n pour $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

(b) En déduire la limite de la suite de terme général $u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 15. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\right| \leq \frac{|x|^7}{7!}.$$

4 - Calcul d'intégrales

Exercice 16. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $I_{m,n} = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^m t^n \, dt$.

Exercice 17. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dt}{t^2 - t}$,

(b) $\displaystyle\int_0^1 t^2(t^3+1)^5 dt$,

(c) $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) dt$,

(d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t + \tan t}$,

(e) $\displaystyle\int_1^8 \frac{dt}{2\sqrt[3]{t} - 1}$,

(f) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 7} \frac{dt}{1 - 4e^{-2t}}$,

(g) $\displaystyle\int_{-1}^2 t|t| dt$,

(h) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{t}} dt$,

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} dt$,

(j) $\displaystyle\int_0^1 t \arctan^2 t dt$,

(k) $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1-t^2} dt$,

(l) $\displaystyle\int_2^5 \frac{t+1}{t^2 - t - 6} dt$.

Exercice 18.

(a) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in [a,b],\ f(a+b-x) = f(x)$. Montrer que :

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

(b) En déduire $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$.

Feuille d'exercices 22
Déterminants

1 - Calculs de déterminants

Exercice 1. Calculer les déterminants suivants :

(a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 28 \end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 27 & 28 & 29 \\ 28 & 30 & 32 \\ 29 & 32 & 36 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 24 & -21 & 13 \\ -11 & 16 & -9 \\ 23 & -19 & 12 \end{vmatrix}$ (i) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix}$

Exercice 2. Calculer les déterminants suivants :

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & i & 1 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! & 3! \\ 1! & 2! & 3! & 4! \\ 2! & 3! & 4! & 5! \\ 3! & 4! & 5! & 6! \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a & a^2 & a^2 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix}$

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$, et $d_n = \underbrace{\begin{vmatrix} a & & 0 & & b \\ & \ddots & & ⋰ & \\ 0 & & & & 0 \\ & ⋰ & & \ddots & \\ b & & 0 & & a \end{vmatrix}}_{2n}$.

Déterminer d_n en fonction de d_{n-1}, et en déduire d_n.

Exercice 4. Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ où :

(a) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} = \min(i,j)$. (b) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} = |i-j|$.

Exercice 5. Soient $a_0, a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ et $V(a_0, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \ldots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$.

Déterminer les racines, puis la factorisation, de $P(X) = V(a_0, \ldots, a_{n-1}, X)$, et en déduire $V(a_0, \ldots, a_n)$.

2 - Applications

Exercice 6. Soit $p \in \mathbb{N}$ et soit $A \in M_{2p+1}(\mathbb{K})$ antisymétrique. Montrer que $\det A = 0$.

Exercice 7. Les familles suivantes sont-elles des bases de E ?

(a) $E = \mathbb{C}^3$, $u_1 = (1+i, 1, i)$, $u_2 = (i, -1, 1-i)$, $u_3 = (-2+i, 0, -i)$,

(b) $E = \mathbb{R}^2$, $u_1 = (\lambda+3, 3\lambda+1)$, $u_2 = (2\lambda+3, 5\lambda+4)$,

(c) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $P_1 = 4X^2 + 3X - 1$, $P_2 = 2X^2 - 2X + 3$, $P_3 = 3X^2 + 2X - 4$,

(d) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $P_1 = X^2$, $P_2 = X(X-1)$, $P_3 = (X-1)^2$,

(e) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $P_1 = (X-\alpha)(X-\beta)$, $P_2 = (X-\alpha)(X-\gamma)$, $P_3 = (X-\beta)(X-\gamma)$.

Exercice 8. Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| < \delta \Rightarrow A + \lambda B \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 9. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que la famille

$$\left(\left(1, \cos a, \cos^2 a\right), \left(1, \cos b, \cos^2 b\right), \left(1, \cos c, \cos^2 c\right)\right)$$

soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

(a) $\left\{\begin{array}{rcl} 13x + 42y &=& 4 \\ 7x + 20y &=& 10 \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x - 6y + z &=& 7 \\ x + 2y + z &=& 5 \\ -2x + 5y - 2z &=& -1 \end{array}\right.$ (c) $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda x + y + z &=& 1 \\ x + \lambda y + z &=& \lambda \\ x + y + \lambda z &=& \lambda^2 \end{array}\right.$

3 - Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 11. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, et soit $f \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}))$ définie par $f(M) = AM$.
Montrer que $\det f = (\det A)^2$.

Exercice 12. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$ définie par $\varphi(M) = M^\intercal$. Déterminer $\det \varphi$.

Exercice 13. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $\varphi(P) = Q$ où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt.$$

Montrer que φ est bien définie, et calculer $\det \varphi$.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit p un projecteur de E de rang $r \leq n$, et soit s la symétrie associée à p. Déterminer les déterminants de p et s.

Feuille d'exercices 23
VARIABLES ALÉATOIRES

1 - VARIABLES ALÉATOIRES

Exercice 1. Un joueur lance n fois une pièce équilibrée. Soit X la variable aléatoire donnant le numéro du lancer lors duquel le résultat est pile pour la première fois ; si pile n'est jamais obtenu, X prend la valeur 0. Déterminer la loi de X.

Exercice 2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule de l'urne, on la remet puis on en tire une seconde. On note X la variable aléatoire égale au plus petit numéro obtenu. Déterminer la fonction de répartition de X, et en déduire la loi de X.

Exercice 3. Un examen est passé par n candidats. Chaque candidat réussit l'examen avec une probabilité p. En cas d'échec, le candidat passe un examen de rattrapage, qu'il réussit avec la même probabilité p. Déterminer la loi du nombre de candidats ayant réussi à l'issue des deux épreuves.

2 - ESPÉRANCE, VARIANCE, ÉCART-TYPE

Exercice 4. Un joueur joue à pile ou face avec une pièce truquée, qui donne pile avec une probabilité p. En misant 20 euros, il peut lancer 12 fois la pièce, et gagne 3 euros à chaque fois qu'il obtient pile. À quelle condition a-t-il intérêt à jouer ?

Exercice 5. Une urne contient 1 jeton marqué 1, 2 jetons marqués 2, et ainsi de suite jusqu'à n jetons marqués n. On tire un jeton, et on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu. Déterminer l'espérance et la variance de X. Quelle est la probabilité de l'événement « $|X - E(X)| \leq \sigma(X)$ » pour $n = 25$?

Exercice 6. Une puce se déplace sur une droite d'origine 0. À chaque instant, elle fait un bond d'une unité vers la droite avec une probabilité p, ou vers la gauche avec une probabilité $1 - p$. À l'instant 0, la puce est à l'origine. On note X_n sa position à l'instant n. Déterminer la loi et l'espérance de X_n.

Exercice 7. Une action voit sa valeur multipliée chaque jour par $\alpha > 1$ avec une probabilité p, par $\beta < 1$ avec une probabilité $1 - p$. Au jour 0, l'action vaut 1. On note X_n sa valeur au jour n. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_n. Si $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$, à quelle condition a-t-on intérêt à investir ?

Exercice 8. Un placard contient n paires de chaussures. On tire au hasard $2r$ chaussures (avec $0 \leq r \leq n$). Soit X la variable aléatoire égale aux nombres de paires complètes obtenues.

(a) On numérote les paires de 1 à n, et on appelle X_i la variable aléatoire indicatrice de l'événement « la paire i se trouve parmi les chaussures tirées ». Déterminer la loi et l'espérance de X_i.

(b) En déduire l'espérance de X.

3 - Couples de variables aléatoires

Exercice 9. On jette n dés, et on note X et Y les nombres de 1 et de 6 obtenus respectivement.

(a) Déterminer les lois suivies par X et Y, leurs espérances et leurs variances.

(b) Déterminer, pour tout $j \in Y(\Omega)$, la loi de X sachant $Y = j$.

(c) En déduire la loi conjointe du couple (X, Y). Les lois de X et Y sont-elles indépendantes ?

(d) Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 10. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$. Déterminer la loi et l'espérance de U et V.

Exercice 11. On pioche deux boules successivement et sans remise dans une urne contenant a boules noires et b boules blanches. On note X_1 la variable indicatrice de l'événement « la première boule est noire » et X_2 la variable indicatrice de l'événement « la seconde boule est noire ».

(a) Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2), ainsi que ses lois marginales.

(b) Montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

(c) Déterminer $E(X_1X_2)$ et $E(X_1)E(X_2)$.

(d) Soit $X = X_1 + X_2$. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 12. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois $\mathcal{B}(m, p)$ et $\mathcal{B}(n, p)$ respectivement. Montrer que $X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(m + n, p)$.

Exercice 13. On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. On note X la variable aléatoire indicatrice de l'événement « on tire un roi », Y la variable aléatoire indicatrice de l'événement « on tire une dame », et Z la variable aléatoire indicatrice de l'événement « on tire un cœur ».

(a) Déterminer les lois conjointes et marginales des couples (X, Y) et (X, Z).

(b) Ces variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 14. Une machine A fabrique 100 pièces, dont 5% sont défectueuses. Une machine B, indépendante de A, fabrique 400 pièces, dont 10% sont défectueuses. On appelle X et Y les variables aléatoires donnant le nombre de pièces défectueuses fabriquées par A et B respectivement.

(a) Déterminer les lois de X et Y.

(b) Soit $Z = X + Y$. Déterminer l'espérance et la variance de Z.

(c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer c tel que le risque que le nombre de pièces défectueuses soit supérieur à c est inférieur à 5%.

Exercice 15. Un joueur mise k euros sur un numéro entre 1 et 6. On lance ensuite 3 dés : si le numéro parié n'apparaît pas, le joueur perd sa mise ; dans le cas contraire il la récupère, augmentée de son multiple par le nombre d'occurrences de son numéro. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 16. Lors d'élections, on sait qu'un parti politique recueille en général un pourcentage p des voix compris entre 20 et 30. Combien de personnes suffit-il d'interroger à la sortie du bureau de vote pour estimer p avec une précision de 3%, et une probabilité d'erreur inférieure à 10% ?

Feuille d'exercices 24
SÉRIES NUMÉRIQUES

1 - ÉTUDE DES SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1. Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2-1}$, (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$, (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{\binom{n}{2}}$.

Exercice 2. En simplifiant l'expression $\dfrac{1}{\tan x}-\dfrac{2}{\tan 2x}$, montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ converge, et déterminer sa somme.

Exercice 3. Soit $x\in\mathbb{R}$. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge, et déterminer sa somme.

Exercice 4. Soit (u_n) une suite décroissante vers 0. On considère la suite (S_n) des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$.

(a) Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

(b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ est convergente.

(c) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |R_n|\leq u_{n+1}$.

2 - SÉRIES À TERMES POSITIFS

Exercice 5. Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{2+(-1)^n}{3^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$,

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\ln\frac{n^3+5n+7}{n^3+5n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\tan\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}$,

(f) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n}{(n+1)!}$,

(g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{e}{n}\right)^n$,

(h) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$,

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2-\ln n}$,

(j) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$,

(k) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2(\ln n)^3}$,

(l) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$, $a\in\mathbb{R}_+$,

(m) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$,

(n) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{e}}$,

(o) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}$.

Exercice 6. Étudier, selon la valeur de $p\in\mathbb{N}$, la série de terme général $u_n=\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!}$.

Exercice 7. Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Étudier les séries de termes généraux :

(a) u_n^2, (b) $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$, (c) $\sqrt{u_n u_{2n}}$, (d) $\dfrac{u_n}{1-u_n}$, (e) $\dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Exercice 8. Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 9. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{a_n}{(1+a_0)\cdots(1+a_n)}.$$

(a) Montrer que la série de terme général u_n converge.

(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1+a_0} \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ diverge.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

(a) Montrer que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.

(b) On note S_n la somme partielle de $\sum u_n$. Simplifier e^{-S_n}, et en déduire la nature de cette série.

Exercice 11. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \geq 2,\ u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

(a) Déterminer la nature de $\sum u_n$ lorsque $\alpha \neq 1$.

(b) On suppose $\alpha = 1$. En encadrant les sommes partielles de $\sum u_n$ par des intégrales, déterminer la nature de cette série.

3 - Séries à termes de signes quelconques

Exercice 12. Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $\arctan$, montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ converge, et déterminer sa somme. Qu'obtient-on pour $x = 1$?

Exercice 13. Déterminer la nature des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \cos n \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$,

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} - \frac{1}{e}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$,

(f) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$,

(g) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$,

(h) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin\left(\pi\frac{n^3+1}{n^2+1}\right)$,

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(1+n)\sin n}{n^2\sqrt{n}}$.

Feuille d'exercices 25
ESPACES PRÉHILBERTIENS

1 - PRODUIT SCALAIRE ET NORME

Exercice 1. Dans $E = \mathbb{R}^2$, on pose, pour tous $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$,

$$\langle u, v\rangle = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :

$$\forall u \in E, \quad \|f(u)\| = \|u\|.$$

Montrer que : $\forall u, v \in E,\ \langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$.

Exercice 3. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)^2 \leq n \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^2$.

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, puis $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien.
Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ u & \mapsto & \langle u, \cdot \rangle \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

2 - ORTHOGONALITÉ

Exercice 6. Soient E un espace euclidien et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad \text{et} \quad F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp.$$

Exercice 7. Soient E l'espace préhilbertien des suites stationnaires à 0 muni du produit scalaire :

$$\forall u, v \in E, \quad \langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n,$$

et $F = \left\{ u \in E \mid \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0 \right\}$. Déterminer $F^\perp$, et vérifier que $F + F^\perp \neq E$.

Exercice 8. Soient E un espace préhilbertien et $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que :

$$\forall u \in E, \quad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle u, e_i\rangle^2.$$

Montrer que E est euclidien de dimension p et que $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 9. Orthonormaliser les bases suivantes :

(a) Dans $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1, 1)$ et $e_2 = (1, 0)$,

(b) Dans $E = \mathbb{R}^3$, $e_1 = (1, 1, -1)$, $e_2 = (1, -1, 1)$ et $e_3 = (-1, 1, 1)$,

(c) Dans $E = \mathbb{R}^4$, $e_1 = (0, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 0, 1, 1)$, $e_3 = (1, 1, 0, 1)$ et $e_4 = (1, 1, 1, 0)$.

3 - Projecteurs orthogonaux

Exercice 10. Soient E un espace euclidien, $u_0 \in E$, $F = \mathrm{Vect}(u_0)^\perp$, p le projecteur orthogonal sur F et s la symétrie orthogonale par rapport à F. Montrer que :

$$\forall u \in E, \quad p(u) = u - \frac{\langle u, u_0 \rangle}{\|u_0\|^2} u_0 \quad \text{et} \quad s(u) = u - 2\frac{\langle u, u_0 \rangle}{\|u_0\|^2} u_0.$$

Exercice 11. On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire :

$$\forall P, Q \in E, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

(a) Orthonormaliser la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

(b) En déduire $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$.

Exercice 12. Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall u \in E, \quad \|p(u)\| \leq \|u\|.$$

Exercice 13. On munit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

On note $F = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2\right)$. Déterminer la distance de $\exp$ à F.

Exercice 14. On munit $E = M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel. Soit $M \in E$, et soit $U \in E$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Déterminer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bU\|$.

Feuille d'exercices 26
FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

1 - FONCTIONS CONTINUES

Exercice 1. Déterminer la limite quand (x, y) tend vers $(0, 0)$ de :

(a) $f(x,y) = xe^{-y^2}$,

(b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

(c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}}$,

(d) $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}-1}{x}$,

(e) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,

(f) $f(x,y) = x^y$.

Exercice 2. Montrer que l'application $f : (x,y) \mapsto \dfrac{\sin(x^2+y)}{\sqrt{1+x^2e^y}}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On note Δ la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = x$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si} \quad (x,y) \notin \Delta \\ f'(x) & \text{si} \quad (x,y) \in \Delta \end{cases}.$$

(a) Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x,y) = \displaystyle\int_0^1 f'\left((1-t)x + ty\right) dt$.

(b) En déduire que φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2 - DÉRIVÉES PARTIELLES

Exercice 4. Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer :

(a) $f(x,y) = e^x \cos(y)$,

(b) $f(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy)$,

(c) $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{x+y}$,

(d) $f(x,y) = x^y$,

(e) $f(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$,

(f) $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Exercice 5. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

(a) $g(x,y) = f(y,x)$,

(b) $g(x) = f(x,x)$,

(c) $g(x,y) = f(y, f(x,x))$,

(d) $g(x) = f(x, f(x,x))$.

Exercice 6. Soit $f : (\mathbb{R}^2)^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}}$.

(a) Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Étudier l'existence de dérivées partielles en $(0, 0)$ pour ce prolongement.

Exercice 7. Les fonctions f suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$ avec $f(0,0) = 0$, sont-elles de classe C^1 ?

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}$,

(b) $f(x,y) = x^2y^2\ln(x^2+y^2)$,

(c) $f(x,y) = x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,

(d) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

Exercice 8. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, puis $f : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_{x^2}^{xy} \varphi$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et calculer ses dérivées partielles.

Exercice 9. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions des systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = yx^2 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^x y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^x + 2y \end{cases}$, (c) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xy^2 \end{cases}$.

Exercice 10. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions des équations suivantes :

(a) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, (b) $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

3 - Extrema

Exercice 11. Déterminer les points critiques et les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par :

(a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$,

(b) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$,

(c) $f(x,y) = x^3 + y^3$,

(d) $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$,

(e) $f(x,y) = x^2 + y^3$,

(f) $f(x,y) = x^4 + y^3 - 3y - 2$,

(g) $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$,

(h) $f(x,y) = x^2y^2(1 + x + 2y)$.

Exercice 12. Dans les cas suivants, montrer que f admet un maximum sur K, et le déterminer :

(a) $f(x,y) = xy(1-x-y)$ et $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$,

(b) $f(x,y) = x - y + x^3 + y^3$ et $K = [0,1]^2$,

(c) $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$ et $K = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]^2$.

Exercice 13. Soit $n \geq 2$, $f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto x_1 \cdots x_n \end{cases}$, et $K = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid x_1 + \ldots + x_n = 1\big\}$.

(a) Montrer que f admet un maximum global sur K et le déterminer.

(b) En déduire que : $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.

Exercice 14. Soit ABC un triangle. Montrer que la fonction $M \mapsto AM^2 + BM^2 + CM^2$ admet un minimum, et que celui-ci est atteint en un unique point.