Corrigé partiel du T. D. A7
Équations différentielles

1 Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y, fonction de la variable réelle t.

a. $y' + 3y = 3t^2/e^{3t}$

b. $y' + y = \cos t + \sin t$ avec $y(0) = -1$

c. $y' - (t+1)y = t^3 + 4$

d. $3y' + 8y = \sin 2t$

e. $(t^2+1)y' + ty = 3t^3$

f. $(1+e^{-t})y' - y = 1$ avec $y(0) = 3$

g. $y' - \frac{3t}{t^2+1}y = \sqrt{t^2+1} - t + \frac{2t^2-1}{t^2+1}$

h. $y' - y = \frac{1}{1+e^{2t}}$ avec $y(0) = \frac{\pi}{4}$

Pour la dernière on pourra utiliser le changement de variable $u = e^t$.

a. Variation de la constante $y(t) = (t^3 + \lambda)e^{-3t}$

b. Solution évidente $y(t) = \sin t - e^{-t}$

c. Solution polynomiale $y(t) = -t^2 + t - 3 + \lambda e^{(t+1)^2/2}$

d. Solution trigonométrique $y(t) = \lambda e^{-8t/3} - \frac{3}{50}\cos 2t + \frac{4}{50}\sin 2t$

e. Solution polynomiale $y(t) = t^2 - 2 + \frac{\lambda}{\sqrt{t^2+1}}$

f. Solution évidente $y(t) = \lambda(e^t + 1) - 1$ avec $\lambda = 2$, donc $y(t) = 2e^t + 1$

g. Variation de la constante et solution polynomiale

$$y(t) = (\lambda + \arctan t)(1+t^2)^{\frac{3}{2}} + t^2 - t + 1$$

h. Variation de la constante et changement de variable $u = e^t$

$$y(t) = e^t(\arctan e^{-t}) - 1 + \lambda e^t \text{ où } \lambda = 1.$$

2 Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y, fonction de la variable réelle t définie sur l'ensemble $\mathscr{D}$ précisé.

a.	$\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^*$	$ty' - y = t^2 \sin t$		
b.	$\mathscr{D} =]-1, 1[$	$(1-t^2)y' + 2ty = t$	avec	$y(0) = 0$
c.	$\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^*$	$ty' - 3y = (t+1)(t-3)$		
d.	$\mathscr{D} =]0, 1[$	$ty' \ln t = (\ln t + 1)y$		
e.	$\mathscr{D} =]0, 2[$	$t(t-2)y' - 2y = (t-1)(t-3)$	avec	$y(1) = 4$
f.	$\mathscr{D} = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$	$\cos t \sin t\, y' + (\sin^2 t - \cos^2 t)y = \cos^3 t$	avec	$y(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$
g.	$\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^*$	$2t(\sqrt{t}+1)y' - (2\sqrt{t}+1)y = 0.$		

a. Variation de la constante	$y(t) = (\lambda - \cos t)t$
b. Solution évidente	$y(t) = \frac{1}{2} + \lambda(1-t^2)$ puis $y(t) = \frac{1}{2}t^2$
c. Solution polynomiale	$y(t) = \lambda t^3 - t^2 + t + 1$
d.	$y(t) = \lambda t \ln t$
e. Solution polynomiale	$y(t) = \lambda\frac{2-t}{t} + t - 2 + \frac{1}{t}$ avec $\lambda = 4$, donc $y(t) = \frac{(t-3)^2}{t}$
f. Solution évidente	$y(t) = \cos t(\lambda \sin t - 1)$ avec $\lambda = 6$

g. Changement de variable $u = \sqrt{t}$

$$y(t) = \lambda(t + \sqrt{t})$$

3 Résoudre les équations différentielles suivantes sur le plus grand intervalle possible contenant 0, avec la condition initiale $y(0) = 1$.

a. $\cos(t)y' + \sin(t)y = 1$ b. $\cos(t)y' - \sin(t)y = 1$

c. $\mathrm{ch}(t)y' - \mathrm{sh}(t)y = \mathrm{th}\, t$ d. $(t+1)^2y' - (t^2-1)y = t^2 - t - 1.$

a.	Sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	Solution évidente	$y(t) = \lambda\, \mathrm{ch}\, t - \frac{1}{2\,\mathrm{ch}^2 t}$	avec	$\lambda = 1$
b.	Sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	Variation de la constante	$y(t) = \frac{t+\lambda}{\cos t}$	avec	$\lambda = 1$
c.	Sur $\mathbb{R}$	Variation de la constante	$y(t) = \lambda\, \mathrm{ch}\, t - \frac{1}{2\,\mathrm{ch}^2 t}$	avec	$\lambda = \frac{3}{2}$
d.	Sur $]-1, +\infty[$	Variation de la constante	$\lambda\frac{e^t}{(t+1)^2} - \frac{t}{t+1}$	avec	$\lambda = 1.$

4 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation :

$$y + \ln(ty' + 1) = t$$

avec $y(1) = 1$, en posant $z = e^y$.

Soit $z(t) = e^{y(t)}$. Comme y est supposée dérivable alors z l'est aussi par composition.
De plus $y(t) = \ln z(t)$ et donc : $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad y'(t) = \frac{z'(t)}{z(t)}$
On en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y(t) + \ln\left(ty'(t) + 1\right) = t \qquad &\iff \qquad \ln z(t) + \ln\left(t\frac{z'(t)}{z(t)} + 1\right) = \ln e^t \\
&\iff \qquad tz'(t) + z(t) = e^t \\
&\iff \qquad z'(t) + \frac{1}{t}z(t) = \frac{e^t}{t}
\end{aligned}$$

La dernière équivalence est valide car on suppose que $t \in \mathbb{R}_+^*$, donc il est non-nul.
Contrairement à l'équation de départ, cette équation est linéaire.
Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, et $t \mapsto -\ln t$ est une primitive de $t \mapsto -\frac{1}{t}$, alors les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions :

$$\begin{aligned}
z_0 : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\
t &\longmapsto \lambda e^{-\ln t} = \tfrac{\lambda}{t} \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

La méthode de variation de la constante nous fournit la solution particulière $z_1 : t \mapsto \frac{e^t}{t}$.
Ainsi les solutions de l'équation d'inconnue z sont les fonctions $z = z_0 + z_1$, à savoir :

$$z(t) = \frac{\lambda + e^t}{t} \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Comme $y(t) = \ln z(t)$ alors les solutions de l'équation de départ sont les fonctions telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad y(t) = \ln\left(\lambda + e^t\right) - \ln t \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

La condition initiale $y(1) = 1$ donne $\ln(\lambda + e) = 1$ donc $\lambda = 0$.
Finalement la solution de l'équation proposée munie de sa condition initiale est :

$$\boxed{y(t) = t - \ln t}$$

$\boxed{5}$ Soit $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Démontrer qu'il existe une unique fonction dérivable f de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in I \qquad f'(t) = \frac{f(t)}{\cos t}$$

La calculer grâce au changement de variable $u = \sin x$.

La condition demandée signifie que f est solution sur I de l'équation différentielle :

$$y' - \frac{1}{\cos t} y = 0 \tag{1}$$

Il s'agit du problème de Cauchy : I est un intervalle, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\cos t}$ est définie et continue sur cet intervalle, et la condition initiale est du type $y(t_0) = y_0$ avec $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Ainsi cette équation différentielle munie de sa condition initiale admet une et une seule solution.

Pour la déterminer il faut résoudre l'équation différentielle.

Celle-ci est homogène. On note $a(t) = \frac{1}{\cos t}$ pour tout $t \in I$, puis on pose :

$$\forall t \in I \qquad A(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{\cos u}$$

La fonction a est continue et I est un intervalle donc le théorème fondamental montre que A est une primitive de a.

La fonction $u \mapsto \sin u$ est de classe $\mathscr{C}^1$. En posant $x = \sin u$ on obtient $\frac{dx}{du} = \cos u$, donc $dx = \cos u \, du$. En appliquant le changement de variable il vient :

$$A(t) = \int_0^t \frac{\cos u \,\mathrm{d}u}{1 - \sin^2 u} = \int_0^{\sin t} \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2}$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

et on en déduit

$$\forall t \in I \qquad A(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t}$$

On remarque que pour tout $t \in I$:

$$A(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin^2 t}{(1 - \sin t)^2} = \ln \sqrt{\frac{\cos^2 t}{(1 - \sin t)^2}} = \ln \frac{\cos t}{1 - \sin t}$$

Ceci car $\cos t$ et $(1 - \sin t)$ sont positifs sur I.

Finalement les solutions de l'équation (1) sont les fonctions

$$\begin{aligned} y_0 : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \lambda e^{A(t)} = \lambda \tfrac{\cos t}{1 - \sin t} \end{aligned} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

La condition initiale $f(0) = 1$ donne $\lambda = 1$, et donc la fonction recherchée est :

$$\boxed{f(t) = \frac{\cos t}{1 - \sin t}}$$

Cette fonction s'écrit aussi $f(t) = \frac{1+\sin t}{\cos t}$.

6 Déterminer l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad f(xy) = f(x) + f(y)$$

On note $\mathscr{P}$ la propriété : $\quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad f(xy) = f(x) + f(y)$

La fonction f est dérivable, donc pour composition, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction $x \mapsto f(xy)$ est dérivable, et sa dérivée est $x \mapsto yf'(xy)$. Si la propriété $\mathscr{P}$ est vraie alors par dérivation par rapport à x elle implique :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad yf'(xy) = f'(x)$$

Cette relation est vraie *a fortiori* si $y = \frac{1}{x}$, ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \frac{1}{x} f'(1) = f'(x)$$

Posons $a = f'(1)$. Alors : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{a}{x}$
Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle alors par primitivation il existe un réel b tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = a \ln x \ + b$$

Cette phase d'analyse nous a montré que si une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable vérifie la propriété $\mathscr{P}$ alors il existe deux réels a et b tels que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = a \ln x + b$.
Dans ce cas la propriété $\mathscr{P}$ s'écrit :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad a \ln(xy) + b = a \ln x + b + a \ln y + b$$

Ceci donne $b = 0$.
Cette phase de synthèse nous montre que l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ est l'ensemble des fonctions $f : x \mapsto a \ln x$, où a est un réel.

7 Déterminer l'ensemble de toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (1+x^2)f(x) - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Analyse :
Soit f une fonction solution.
Posons $g(x) = xf(x)$. Alors g est continue et la fonction $x \mapsto \int_0^x tf(t)\,dt$ en est une primitive, d'après le théorème fondamental. Elle est donc dérivable, de dérivée g.
Par hypothèse la fonction f vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (1+x^2)f(x) - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Par dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2xf(x) + (1+x^2)f'(x) - xf(x) = 0.$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (1+x^2)f(x) + xf(x) = 0.$$

Ceci montre que f est solution de l'équation différentielle :

$$(1+x^2)y' + xy = 0.$$

En posant $a(x) = -\frac{x}{1+x^2}$ et $A(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ on justifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Synthèse :
Soit $fx \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}$ où λ est un réel.
On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (1+x^2)f(x) - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = \lambda.$$

On en déduit que f est solution du problème si et seulement si $\lambda = 1$.
Finalement la seule solution du problème est la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

8 Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y, fonction de la variable réelle t.

a. $y'' - 8y' + 25y = 40e^{3t}$

b. $y'' - 3y' - 4y = 6e^{t} + 10e^{4t}$

c. $\frac{1}{2}y'' - y' + y = t^2$

d. $4y'' - y = 3\operatorname{ch} t$ avec $y(0) = y'(0) = 1$

e. $y'' - 2y' + y = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 0$

f. $y'' + 4y' + 4y = 4\operatorname{ch} 2t$ avec $y(0) = y'(0) = 0$

g. $y'' - 5y' + 6y = e^{3t}$ avec $y(0) = -1$ et $y'(0) = -3$

a. $y(t) = \alpha e^{(4+3i)t} + \beta e^{(4-3i)t} + 4e^{3t}$

b. $y(t) = (2t + \alpha)e^{4t} + \beta e^{-t} - e^{t}$

c. $y(t) = \alpha e^{(1+i)t} + \beta e^{(1-i)t} + (t+1)^2$

d. $y(t) = 2\operatorname{sh} \frac{t}{2} + \operatorname{ch} t$

e. $y(t) = 1 + (t-1)e^{t}$

f. $y(t) = (t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8})e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{2t}$

g. $y(t) = e^{2t} + (t-2)e^{3t}$

9 Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y, fonction réelle de la variable réelle t.

a. $y'' + 4y' + 5y = e^{-2t}$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$

b. $y'' + y = 2\operatorname{sh} t$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$

c. $y'' + 4y = 4\cos(2t)$ avec $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$

d. $y'' - 7y' + 10y = 13\sin t$

e. $y'' + 2y = 2$ avec $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$

f. $\frac{1}{4}y'' - y' + y = \cos 2t$ avec $y(0) = y'(0) = 0$

g. $y'' + y = 2\sin^2 t$

h. $\frac{1}{2}y'' + y' + 5y = \cos 3t - 6\sin 3t$ avec $y(0) = 4$ et $y'(0) = -2$

i. $y'' - 6y' + 8y = 16t^2$

j. $y'' - 2y' - 3y = e^{-t}\cos t$

a. $y(t) = (1 + \sin t)e^{-2t}$

b. $y(t) = \sin t + \operatorname{sh} t$

c. $y(t) = 4\cos 2t + t\sin(2t)$

d. $y(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^{5t} + \frac{7}{10}\cos t + \frac{9}{10}\sin t$

e. $y(t) = 1 + 3\cos\sqrt{2}t$

f. $y(t) = te^{2t} - \frac{1}{2}\sin 2t$

g. $y(t) = A\cos t + B\sin t + 1 + \frac{1}{3}\cos(2t)$

h. $y(t) = 2(1 + e^{-t})\cos 3t$

i. $y(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^{4t} + 2t^2 + 3t + \frac{7}{4}$

j. $y(t) = \alpha e^{-t} + \beta e^{3t} - \frac{e^{-t}}{17}(\cos t + 4\sin t)$

10 Déterminer l'ensemble des fonctions réelles f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = f(-x)$$

Notons $\mathscr{P}$ la propriété ; $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(-x)$
Soit f une fonction deux fois dérivable vérifiant cette propriété. Alors par dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) = -f'(-x)$$

Or la propriété $\mathscr{P}$ est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, si x appartient à $\mathbb{R}$ alors $-x$ appartient à $\mathbb{R}$, donc on peut substituer $-x$ à x :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(-x) = -f(x)$$

Ainsi on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) = -f(x)$$

Ceci montre que f est solution de l'équation différentielle $y'' - y = 0$.
Or les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & A\cos t + B\sin t \end{array} \qquad \text{où } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Ainsi, si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable vérifie la propriété $\mathscr{P}$ alors elle est de la forme $f(x) = A\cos x + B\sin x$ où A et B sont deux constantes réelles.
Mais dans ce cas la condition $\mathscr{P}$ s'écrit :

$$\begin{array}{rll} & \forall x \in \mathbb{R} & -A\sin x + B\cos x = A\cos x - B\sin x \\ \iff & \forall x \in \mathbb{R} & (B - A)(\cos x - \sin x) = 0 \end{array}$$

Ceci équivaut à l'égalité $A = B$.
Ainsi l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ est l'ensemble des fonctions $f : x \mapsto A(\cos x + \sin x)$, où A est un réel.

11 Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 3y(t) \end{cases}$$

d'inconnues x et y, fonctions de t, vérifiant les conditions initiales $x(0) = 3$ et $y(0) = 0$.

Après manipulation on obtient que la fonction x vérifie :

$$x'' + x' - 2x = 0.$$

On en déduit $x(t) = \alpha e^t + \beta e^{-2t}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, puis $y(t) = \frac{\alpha}{2}e^t + 2\beta e^{-2t}$.
Les conditions initiales donnent : $x(t) = 4e^t - e^{-2t}$ et $y(t) = 2e^t + 2e^{-2t}$.

12 Résoudre l'équation différentielle

$$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$$

munie des conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ et $y''(0) = 8$.

On remarque que l'équation différentielle proposée s'écrit :

$$(y' - 2y)'' - 4(y' - 2y) = 0$$

On pose $z = y' - 2y$. Alors y est solution de l'équation proposée si et seulement si z est solution de l'équation :

$$z'' - 4z = 0$$

Les solutions de cette équation différentielle du second ordre sont les fonctions $z : t \mapsto \alpha e^{2t} + \beta e^{-2t}$, où α et β sont deux réels.
De plus les conditions initiales sur y donnent les conditions initiales sur z :

$$z(0) = y'(0) - 2y(0) = -1 \qquad \text{et} \qquad z'(0) = y''(0) - 2y'(0) = 6$$

Comme $z(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^{-2t}$ alors $z'(t) = 2\alpha e^{2t} - 2\beta e^{-2t}$. Les conditions initiales sur z donnent :

$$\begin{cases} z(0) = -1 \\ z'(0) = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 2\alpha - 2\beta = 6 \end{cases}$$

On en déduit $\alpha = 1$ et $\beta = -2$, et donc $z(t) = e^{2t} - 2e^{-2t}$.
Or par définition $z = y' - 2y$, donc on calcule y en résolvant l'équation différentielle du premier ordre :

$$(E) \qquad y' - 2y = e^{2t} - 2e^{-2t}$$

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonction $y_0 : t \mapsto \lambda e^{2t}$ où λ est un réel. Ceci par on résout cette équation sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et car la fonction $t \mapsto 2t$ est une primitive de la fonction $t \mapsto 2$.

Pour déterminer une solution particulière de l'équation (E) on définit les deux équations suivantes :

$$(E_1) \qquad y' - 2y = e^{2t} \qquad\qquad (E_2) \qquad y' - 2y = -2e^{-2t}$$

On obtient les solutions particulières respectives $y_1(t) = te^{2t}$ et $y_2(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}$.
D'après le principe de superposition la fonction $y_3 = y_1 + y_2$ est solution de l'équation (E), puis les fonctions $y = y_0 + y_3$ sont les solutions de l'équation (E). On obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = (t+\lambda)e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

La condition initiale $y(0) = 1$ montre que $\lambda = \frac{1}{2}$. Finalement la solution de l'équation de départ munie de ses conditions initiales est :

$$\boxed{y(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t} = te^{2t} + \operatorname{ch}(2t)}$$

Remarque : Il est possible aussi de résoudre cet exercice en posant $z = y'' - 4y$.

13 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$t^3y'' - 2ty = 6$$

munie des conditions initiales $y(1) = y'(1) = -1$.
On posera $z(x) = y(e^x)$.

On montre que y est solution si et seulement si z est solution de l'équation :

$$z'' - z' - 2z = 6e^{-x}$$

Ceci donne $z(x) = (\alpha - 2x)e^{-x} + \beta e^{2x}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
On en déduit $y(t) = \frac{\alpha + \ln t}{t} + \beta t^2$.
Avec les conditions initiales : $y(t) = -\frac{1+2\ln t}{t}$