

Corrigé partiel du T. D. B2

Logique

9 Démontrer qu'étant donnés trois réels, deux au moins d'entre eux sont de même signe.

Pour ceci, remarquer que deux réels x et y ont même signe si $xy \geq 0$.

On souhaite démontrer :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (xy \geq 0 \quad \text{ou} \quad xz \geq 0 \quad \text{ou} \quad yz \geq 0)$$

La négation de cette propriété est :

$$\exists(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (xy < 0 \quad \text{et} \quad xz < 0 \quad \text{et} \quad yz < 0)$$

Cette propriété est fausse. En effet, si $xy < 0$, $xz < 0$ et $yz < 0$ alors par produit $x^2y^2z^2 < 0$, ce qui faux car le carré d'un réel est positif.

Par négation, la propriété de départ est vraie : parmi trois réels, deux au moins sont de même signe.

10 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes ainsi que leurs négations.

- f est l'identité de $\mathbb{R}$.
- f admet un point fixe.
- f est monotone.
- f est surjective (tout élément de $\mathbb{R}$ admet au moins un antécédent).
- f est injective (tout élément de $\mathbb{R}$ admet au plus un antécédent).

a. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x$ non a. $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq x$

b. $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x$ non b. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq x$

c. $(\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad (x \leq x' \implies f(x) \leq f(x')))$

ou $(\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad (x \leq x' \implies f(x) \geq f(x')))$

non c. $\exists(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \quad (a \leq b \text{ et } c \leq d \text{ et } f(a) > f(b) \text{ et } f(c) < f(d))$

d. $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$ non d. $\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq y$

e. $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad (f(x) = f(x') \implies x = x')$

non e. $\exists (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad (f(x) = f(x') \text{ et } x \neq x')$

12 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Démontrer que si $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante, alors f est strictement décroissante.

On raisonne par l'absurde.

Supposons que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante.

On souhaite démontrer que f est strictement décroissante, donc que :

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad (x < x' \implies f(x) > f(x'))$$

Supposons que f n'est pas strictement croissante, donc que :

$$\exists (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad (x < x' \text{ et } f(x) \leq f(x'))$$

Soit (x, x') un tel couple de réels.

Comme $x < x'$ et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante alors :

$$f \circ f \circ f(x) > f \circ f \circ f(x') \quad (1)$$

Comme $f(x) \leq f(x')$ et $f \circ f$ est croissante alors :

$$f \circ f \circ f(x) \leq f \circ f \circ f(x') \quad (2)$$

Les inégalités (1) et (2) sont incompatibles.

Cette contradiction montre que f est strictement décroissante.

13 Principe des tiroirs.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ma commode possède n tiroirs et elle contient $n + 1$ chaussettes.

Démontrer qu'au moins un tiroir contient au moins deux chaussettes.

b. Démontrer de nouveau qu'étant donnés trois réels, deux au moins sont de même signe.

a. La négation du principe des tiroirs est : Aucun tiroir ne contient au moins deux chaussettes. Dans ce cas chaque tiroir contient au plus une chaussette, et donc la commode contient au plus n chaussettes, ce qui est faux.

Par négation le principe des tiroirs est valable : au moins un tiroir contient au moins deux chaussettes.

b. Deux signes sont possibles pour trois réels, donc d'après le principe des tiroirs au moins deux des trois réels ont même signe.

14 On considère 2025 entiers relatifs.

Démontrer qu'il est possible d'en extraire un certain nombre dont la somme est multiple de 2025.

Soit $n_1, \dots, n_{2025}$ des entiers relatifs.

On définit :

$$\forall k \in \{1, \dots, 2025\} \quad m_k = \sum_{i=1}^k n_i.$$

Alors $m_1, \dots, m_{2025}$ sont 2025 entiers.

Soit l'un d'entre eux est multiple de 2025, soit non.

Si c'est le cas alors on a extrait un certain nombre d'entiers de la liste $n_1, \dots, n_{2025}$ dont la somme est multiple de 2025.

Sinon les restes modulo 2025 sont dans l'ensemble $\{1, \dots, 2024\}$. D'après le principe des tiroirs au moins deux d'entre eux sont égaux : il existe $(j, k) \in \{1, \dots, 2025\}^2$ tel que $j < k$ et $m_j \equiv m_k$ modulo 2025. La différence $m_k - m_j$ est alors multiple de 2025. Il s'agit de la somme $n_{j+1} + \dots + n_k$, donc on a bien extrait un certain nombre d'entiers dont la somme est multiple de 2025.

20 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 9u_{n+1} - 20u_n$$

Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a^n - b^n$$

Analyse. S'il existe deux réels a et b satisfaisant la condition demandée alors $u_1 = a - b$ et $u_2 = a^2 - b^2$. On sait que $u_1 = 1$ et on calcule $u_2 = 9$.

Le système $\begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 - b^2 = 9 \end{cases}$ donne $a = 5$ et $b = 4$.

Synthèse. Démontrons par récurrence double que la propriété $\mathcal{P}_n : u_n = 5^n - 4^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Les propriétés $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies car $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ les propriétés $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies. Alors par définition de la suite (u_n) :

$$u_{n+2} = 9u_{n+1} - 20u_n.$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 9(5^{n+1} - 4^{n+1}) - 20(5^n - 4^n) \\ &= (9 \times 5 - 20)5^n - (9 \times 4 - 20)4^n = 25 \times 5^n - 16 \times 4^n = 5^{n+2} - 4^{n+2} \end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.

L'hérédité est démontrée.

Conclusion. Par récurrence double la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

21 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^3}{u_n^2}$$

On remarque que $u_0 = 2^0$, $u_1 = 2^1$, $u_2 = 2^3$, $u_3 = 2^7$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : $u_n = 2^{2^n-1}$.

On démontre par récurrence double que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Les propositions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ les propositions $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies.

Alors par définition de la suite (u_n) :

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^3}{u_n^2}$$

Les hypothèses de récurrence montrent que :

$$u_{n+2} = \frac{2^{3(2^{n+1}-1)}}{2^{2(2^n-1)}} = 2^{6 \times 2^n - 3 - 2 \times 2^n + 2} = 2^{2^{n+2}-1}$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+2}$ est donc vraie.

L'hérédité est démontrée.

Conclusion. Par récurrence double la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc le terme général de la suite (u_n) est :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^{2^n-1}$$

22 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par la donnée de u_0 , u_1 , u_2 et l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = 7u_{n+2} - 11u_{n+1} + 5u_n$$

- On suppose que $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$. Déterminer le terme général de (u_n) .
- Même question avec $u_0 = 1$, $u_1 = 5$ et $u_2 = 25$.

- Le calcul des premiers termes suggère que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2n + 1$

On définit $\mathcal{P}_n : u_n = 2n + 1$ et on démontre cette propriété par récurrence triple.

Pour l'initialisation on vérifie que $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies.

Pour l'hérédité on suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ les propriétés $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_{n+1}$, $\mathcal{P}_{n+2}$ sont vraies et on démontre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{n+3}$ est vraie.

- De même on démontre : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 5^n$.

23 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^n u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^n u_k \right)^2$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : $u_n = n$.

On démontre par récurrence forte que cette proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^n u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^n u_k \right)^2$.

Pour $n = 1$ cette égalité donne $u_1^3 = u_1^2$.

Comme u_1 est non-nul car strictement positif : $u_1 = 1$.

La proposition $\mathcal{P}_1$ est donc vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que les propositions $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{n-1}$ sont toutes vraies, et on démontre que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie.

L'égalité de l'énoncé donne :

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k^3 \right) + u_n^3 = \left(\left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k \right) + u_n \right)^2$$

Par hypothèses de récurrence : $\forall k = 1, \dots, n-1 \quad u_k = k$.

On en déduit :

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^3 \right) + u_n^3 = \left(\left(\sum_{k=1}^{n-1} k \right) + u_n \right)^2$$

Les formules pour la somme des premiers entiers et la somme de premiers cubes donnent :

$$\left(\frac{n(n-1)}{2} \right)^2 + u_n^3 = \left(\frac{n(n-1)}{2} + u_n \right)^2$$

En développant :

$$u_n^3 = u_n^2 + n(n-1)u_n$$

Comme u_n est non-nul :

$$u_n^2 - u_n - n(n-1) = 0$$

Les racines de cette équation du second degré sont n et $1-n$. Comme u_n est strictement positif alors $u_n = n$.

La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie, et l'hérédité est démontrée.

Conclusion. Par récurrence forte la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = n.$$

24 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui vérifient :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad f(m+n) = f(m)f(n)$$

Analyse. Soit f une solution du problème.

On pose $a = 1$. Alors, pour $m = 1$ on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n+1) = af(n).$$

Ceci montre que la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a , et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = f(0)a^n.$$

En particulier $a = f(0)a$.

Si a est non-nul alors $f(0) = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(n) = a^n$.

Si a est nul alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f(n) = 0$.

Comme $f(0)^2 = f(0)$ alors $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. La fonction f est nulle sauf peut-être en 0 où elle vaut 1.

Synthèse. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = a^n$.

Alors pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$: $f(m+n) = a^{m+n} = a^m a^n = f(m)f(n)$.

Ainsi la fonction f est bien solution du problème.

On vérifie aussi que la fonction $g : n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$ est solution.

Finalement les solutions sont les fonctions $a \mapsto a^n$ où a est un entier naturel, éventuellement nul, ainsi que la fonction g définie ci-dessus.

25 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

Analyse. Soit f une solution du problème. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, f vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(xy) = f(x) + f(y).$$

La fonction $x \mapsto f(xy)$ est dérivable par composition. On en déduit par dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad yf'(xy) = f'(x).$$

Ceci est valable pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, donc en particulier si $y = \frac{1}{x}$, ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{x} f'(1) = f'(x).$$

Soit $a = f'(1)$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{a}{x}.$$

Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle alors il existe un réel K tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = a \ln x + K.$$

Les fonctions solutions possibles sont donc les fonctions $f : x \mapsto a \ln x + K$ où $(a, K) \in \mathbb{R}^2$.

Synthèse. Soit $(a, K) \in \mathbb{R}^2$ et $f : x \mapsto a \ln x + K$.

Alors f est bien une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad f(xy) &= a \ln(xy) + K &= a \ln x + a \ln y + K \\ f(x) + f(y) &= a \ln x + K + a \ln y + K = a \ln x + a \ln y + 2K \end{aligned}$$

La fonction f est solution du problème si et seulement si $K = 0$.

Finalement les fonctions solutions sont les fonctions $f : x \mapsto a \ln x$ où $a \in \mathbb{R}$.

On peut ajouter que les fonctions *logarithme de base b* , définie par $\ln_b = \frac{\ln x}{\ln b}$ où $b \in \mathbb{R}_+^*$ sont toutes solutions (en posant $a = \frac{1}{\ln b}$, soit $b = e^{\frac{1}{a}}$, si a est non-nul). L'ensemble des solutions est l'ensemble de toutes les fonctions logarithmes de base b ainsi que la fonction nulle.

26 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$$

Analyse. Soit f une fonction solution du problème, *i.e.*, une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \quad (3)$$

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$ donc l'égalité ci-dessus est valable pour $\frac{1}{x}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f\left(\frac{1}{x}\right) + 3f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (4)$$

Alors par soustraction du triple de l'égalité (3) à l'égalité (4) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad -8f(x) = x^2 - \frac{3}{x^2}$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \frac{3}{8x^2} - \frac{x^2}{8} = \frac{3-x^4}{8x^2}$$

Synthèse. Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \frac{3-x^4}{8x^2}$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{3-x^4}{8x^2} + 3 \frac{3-\frac{1}{x^4}}{\frac{8}{x^2}} \\ &= \frac{3-x^4+9x^4-3}{8x^2} = \frac{8x^4}{8x^2} = x^2 \end{aligned}$$

Ceci montre que f est bien solution du problème.

En conclusion le problème admet la fonction $x \mapsto \frac{3-x^4}{8x^2}$ pour unique solution.

27 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient :

- a. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$
- b. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f\left(\frac{2x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$
- c. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) + xf(1-x) = 1 + x$
- d. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y$

a. Analyse. Supposons que f est une fonction solution.

Pour $x = y = 0$ on obtient $f(0)^2 - f(0) = 0$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Pour $x = 0$ et $y = 1$ on obtient $f(0)(f(1) - 1) = 1$, donc $f(0) \neq 0$, et $f(0) = 1$.

Pour x quelconque et $y = 0$ on obtient $f(x) - 1 = x$, donc $f(x) = x + 1$.

Synthèse. Soit $f(x) = x + 1$. Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x)f(y) - f(xy) = (x+1)(y+1) - xy - 1 = x + y$$

Ainsi la fonction $x \mapsto x + 1$ est solution unique du problème.

b. Analyse. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution du problème. Alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f\left(\frac{2x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{2y+x}{3}\right) = \frac{1}{2}(f(y) + f(x))$$

On en déduit :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f\left(\frac{2x+y}{3}\right) = f\left(\frac{x+2y}{3}\right)$$

Soit t un réel. Posons $x = 2t$ et $y = -t$. Alors $\frac{2x+y}{3} = t$ et $\frac{x+2y}{3} = 0$, donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = f(0).$$

Ceci montre que f est constante.

Seules les fonctions constantes peuvent donc être solutions du problème.

Synthèse. Si f est constante alors f est solution du problème.

Finalement les solutions du problème sont les fonctions constantes.

c. Analyse. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction solution du problème, *i.e.*, vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) + xf(1-x) = 1 + x \tag{5}$$

Si x est un réel alors $1-x$ est un réel et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(1-x) + (1-x)f(x) = 1 + (1-x) = 2-x$$

En multipliant par x :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x-x^2)f(x) + xf(1-x) = 2x - x^2 \tag{6}$$

Par soustraction des égalités (5) et (6) :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (1-x+x^2)f(x) = 1-x+x^2$$

Pour tout réel x le trinôme $x^2 - x + 1$ est non-nul (car de discriminant strictement négatif), donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 1$$

La fonction constante égale à 1 est donc la seule solution possible du problème.

Synthèse. Soit $f(x) = 1$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) + xf(1-x) = 1 + x$$

Ceci montre que la fonction $f : x \mapsto 1$ est bien solution du problème.

Finalement l'unique solution est la fonction constante égale à 1.

d. Analyse. Soit f une fonction solution du problème, c'est-à-dire une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y$$

Soit y un réel quelconque. Soit $x = y + f(y)$. Alors $x - f(y) = y$ et donc :

$$f(y) = 2 - y - f(y) - y \quad \text{puis} \quad f(y) = 1 - y$$

Ainsi la fonction $t \mapsto 1 - t$ est la seule solution possible du problème.

Synthèse. Soit $f : t \mapsto 1 - t$. Alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x - f(y)) = 1 - (x - (1 - y)) = 2 - x - y$$

La fonction f est bien solution du problème.

Finalement l'unique solution est la fonction $t \mapsto 1 - t$.