Feuille de TD n°2
TD — Suites numériques

1 On définit les suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3n-4}{2n+1}$ et $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \dfrac{3u_n - 4}{2u_n + 1}$.
Calculer les quatre premiers termes des suites (u_n) et (v_n).

2 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 - n + 1$

1. Calculer u_0 et u_{10}.
2. Exprimer, en fonction de n, $u_n + 1$ et u_{n+1}.

3 Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = \dfrac{1}{2}$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{10}.

4 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $q = 3$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_5.

5 On suppose que chaque année, la producion d'une usine subit une baisse de $4\,\%$.
Au cours de l'année 2000, la production a été de 25 000 unités.

1. On note $P_0 = 25000$ et P_n la production prévue au cours de l'année $(2000 + n)$.
   Montrer que (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. Calculer la production de l'usine en 2023.

6 Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_4 = 5$ et $u_{11} = 19$.
Calculer la raison r et le premier terme u_0.

7 Quelle forme choisir ?
Une variété de bambou grandit de 6 cm par jour. On achète dans un magasin un spécimen de 20 cm.
On note u_n la taille du bambou au bout de n journées, où n est un nombre entier.

1. Justifier que (u_n) est arithmétique et préciser le premier terme et la raison.
2. Donner l'écriture de son terme général.
3. Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n).
4. Calculer u_{84}.

8 algorithme
Écrire un programme en Python qui permet l'affichage des 10 premiers termes de la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 20 \\ u_{n+1} = u_n + 6 \end{cases}$$

Écrire une fonction en Python qui permet de donner la valeur d'un terme choisi d'une suite arithmétique que l'on peut définir également. Par exemple la commande `arith(20,6,84)` renvoie la valeur u_{84} de la suite définie ci-dessus.

9 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. Donner les valeurs exactes.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique
   (b) En déduire une expression de v_n en fonction de n pour tout n entier.
   (c) En déduire une expression de u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{100}
4. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

10 Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Démontrer que la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

11 **(*)**On considère la suite définie par $u_0 = a$ et la relation de récurrence

$$(R) \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + n^2 + n$$

1. Déterminer un polynôme P du second degré, de façon à ce que la suite de terme général $\alpha_n = P(n)$ vérifie la relation (R).
2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha_n$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. Donner l'expression de v_n en fonction de n et de a, puis celle de u_n.

12 **(**) Les singes et les noix de coco**

« Le premier singe prit la moitié des noix de coco, plus une.
Le deuxième prit la moitié du reste plus deux
Le troisième prit la moitié du reste plus trois...
Le Ne et dernier prit la moitié du reste précédent, plus N. »

Déterminer en fonction de N le nombre total x de noix de coco.

Utiliser le nombre restant de noix de cocos.

13

1. La suite (v_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = (n-1)^3$
   (a) Calculer les 3 premiers termes de la suite (v_n). Que pourrait-on supposer ?
   (b) Démontrer que la suite v n'est pas arithmétique.
2. La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (n+3)^2 - n^2 - 7$.
   Démontrer qu'elle est arithmétique. Préciser le premier terme et la raison.

14 Une suite arithmétique a pour premier terme 13 et pour centième terme 2011.
Calculer la moyenne des 100 premiers termes de cette suite.

15 On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique. Montrer que la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^{u_n}$ est géométrique, préciser le premier terme et la raison.

16 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{3+2u_n}$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les variations et la limite éventuelle de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{3}{u_n}$
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.
   (b) En déduire une expression de v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n puis vérifier les conjectures émises dans la première question.

17 Pour s'entraîner : $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$ et $u_0 = \dfrac{1}{2}$.
Montrer que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$ est géométrique.
Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

18 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4n + 2$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2n$. En déduire la limite de la suite (u_n)
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2n$
   (a) Démontrer que (v_n) est géométrique. Préciser le premier terme et la raison.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.
3. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{3^{n+1}-1}{2} + n(n+1)$.

19

1. a est un nombre réel. On considère la suite (u_n) définie par pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{4}{10} - \dfrac{3}{10}u_n \end{cases}$.
   (a) (v_n) est la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = 13u_n - 4$
   Démontrer que (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n et a.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$u_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
2. Un professeur oublie souvent ses clés de salle.
   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement : « le professeur oublie ses clés le jour n » et $\overline{E_n}$ l'événement contraire.
   p_n est la probabilité de E_n. On note $p_1 = a$, la probabilité qu'il oublie ses clés le premier jour.
   On suppose en outre que les deux conditions suivantes sont réalisées :
   - si le jour n il a oublié ses clés, alors la probabilité qu'il les oublie le jour suivant est de $\dfrac{1}{10}$
   - S'il ne les oublie pas le jour n, la probabilité qu'il les oublie le jour suivant est $\dfrac{4}{10}$.

   (a) Démontrer que $p_{n+1} = \dfrac{1}{10}p_n + \dfrac{4}{10}(1-p_n)$.

(b) En déduire une expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

(c) À l'aide des résultats de la question **1.**, donner l'expression de p_n en fonction de n et de a.

(d) La limite de (p_n) dépend-t-elle de la condition initiale a ?

$\boxed{20}$ *Deux exemples de suites récurrentes doubles, telles qu'on les trouvait dans des épreuves du bac dans les années 70 et 80.*

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{11}{2}$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n = 0$$

   (a) Résoudre l'équation $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$.

   (b) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$. Montrer que (u_n) est géométrique et donner son expression en fonction de n.

   (c) On considère la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 2^n \times u_n$. Montrer que (w_n) est arithmétique, donner son expression en fonction de n.

   (d) Déduire de ce qui précède l'expression de u_n en fonction de n.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et $u_1 = 0$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$$

   (a) Résoudre l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$.

   (b) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que (v_n) est géométrique et donner son expression en fonction de n.

   (c) On considère la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = u_{n+1} - 3u_n$. Montrer que (w_n) est géométrique, donner son expression en fonction de n.

   (d) Déduire de ce qui précède l'expression de u_n en fonction de n.

$\boxed{21}$ Soient a et b deux nombres réels non nuls. *Le but de l'exercice est de déterminer l'expression en fonction de n de la suite réelle u vérifiant :*

u_0 et u_1 donnés, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

1. Soit r un nombre réel, on définit la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_{n+1} - ru_n.$$

   (a) (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et de u_n.

   (b) En déduire que si r est une solution de l'équation $x^2 - ax - b = 0$ alors la suite v est géométrique.

2. Dans cette question on suppose que l'équation $x^2 - ax - b = 0$ admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2.

   (a) Exprimer $u_{n+1} - r_1u_n$ et $u_{n+1} - r_2u_n$ en fonction de u_0, u_1 et de n.

   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de de u_0, u_1 et de n.

3. Dans cette question on suppose que l'équation $x^2 - ax - b = 0$ admet une seule solution double r_0.

   (a) Exprimer $u_{n+1} - r_0u_n$ en fonction de u_0, u_1 et de n.

   (b) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} puis en fonction de u_{n-2}, puis en fonction de u_{n-3}.

4. En déduire l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

Feuille de TD n°2
Réponses ou Solutions

1

	0	1	2	3	4
u_n	-4	$-0,333$	$0,4$	$0,714$	$0,889$
v_n	1	$-0,333$	-15	$1,689$	$0,244$

2 $u_0 = 1$ et $u_{10} = 91$, $u_n + 1 = n^2 - n + 2$ et $u_{n+1} = n^2 + n + 1$

6 $r = 2$, $u_0 = -3$.

7

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 6$, $u_0 = 20$, donc (u_n) est arithmétique de raison 6 et de premier terme 20.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 20 + 6n$
3. $u_{84} = 20 + 6 \times 84 = 524$, soit 5,24 m au bout de 84 jours.

8

```
def arith(u0,r,n):
u=u0   for i in range(n):      u=u+r   return u
```

9

1. $u_1 = \dfrac{5}{3}$, $u_2 = \dfrac{3}{2}$, $u_3 = \dfrac{7}{5}$
2. $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$
   (a) Pour montrer que (v_n) est arithmétique, on exprime v_{n+1} en fonction de v_n.
   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{3u_n - 1}{u_n + 1} - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{2u_n - 2}{u_n + 1}} \\ &= \frac{u_n + 1}{2u_n - 2} \end{aligned}$$
   Or, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1} \iff u_n - 1 = \dfrac{1}{v_n} \iff \boxed{u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1 = \dfrac{v_n + 1}{v_n}}$
   Ainsi, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\frac{v_n+1}{v_n} + 1}{\frac{v_n+1}{v_n} - 1} = \dfrac{1}{2} \dfrac{2v_n + 1}{1} = v_n + \dfrac{1}{2}$
   Et donc (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = 1$.
   (b) Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 + \dfrac{1}{2}n$
   (c) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{v_n + 1}{v_n} = \dfrac{2 + \frac{1}{2}n}{1 + \frac{1}{2}n} = \dfrac{4 + n}{2 + n}$.
3. $u_{100} = \dfrac{104}{102}$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

$\boxed{12}$ Indications :
Soit r_n le nombre de noix de coco restantes après le ne singe ($0 \leqslant n \leqslant N$, en convenant que $r_0 = x$)

1. Démontrer que $\begin{cases} r_0 = x \\ r_n = \dfrac{r_{n-1}}{2} - n \end{cases}$ pour $1 \leqslant n \leqslant N$
2. Étudier la suite $(u_n)\colon u_n = r_n + 2n - 2$. (Chercher une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.)
3. En déduire l'expression de r_n en fonction de n et de x.
4. En déduire que $x = 2^{N+1}(N-1) + 2$.

$\boxed{13}$

1. (a) $u_0 = -1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$. La suite pourrait être arithmétique de raison 1 et de premier terme -1.
   (b) $u_{n+1} - u_n = n^3 - n^3 - 3n^2 + 3n - 1 = 3n^2 - 3n + 1$ non constant, donc (u_n) n'est pas arithmétique.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6n + 2$ donc (u_n) est arithmétique de premier terme 2 et de raison 6.

$\boxed{14}$ On a $u_0 = 13$ et $u_{99} = 2011$. La somme des 100 premiers termes, c'est $S_{99} = 100 \times \dfrac{u_0 + u_{99}}{2}$, la moyenne c'est la somme divisée par 100, soit $\overline{m} = \dfrac{u_0 + u_{99}}{2} = \dfrac{2024}{2} = 1012$

$\boxed{15}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$ donc $v_n = 2^{u_0 + nr} = 2^{u_0} \times \left(2^r\right)^n$, donc (v_n) est géométrique de premier terme 2^{u_0} et de raison 2^r.

$\boxed{16}$ $v_{n+1} = \dfrac{3}{u_{n+1}} = \dfrac{3}{\frac{3u_n}{3+2u_n}} = \dfrac{3 + 2u_n}{u_n} = \dfrac{3}{u_n} + \dfrac{2u_n}{u_n} = v_n + 2$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3}{1 + 2n}$, décroissante, tend vers 0.

$\boxed{17}$ $v_{n+1} = 3v_n$, $u_n = \dfrac{v_n}{v_n + 1}$

$\boxed{18}$

1. hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie, donc $u_n \geqslant 2n$.
   Ainsi, $3u_n \geqslant 6n$ donc $u_{n+1} = 3u_n - 4n + 2 \geqslant 2n + 2 \geqslant 2(n+1)$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
2. (v_n) est géométrique de raison 3.
3. On utilise la linéarité de la somme.

$\boxed{20}$

1. (a) Solution : $\dfrac{1}{2}$
   (b) (v_n) géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. $v_n = 5\dfrac{1}{2^n}$
   (c) (w_n) arithmétique de raison 10 : $w_n = 1 + 10n$
   (d) $u_n = \dfrac{1 + 10n}{2^n}$.
2. (a) Solutions : 2 et 3.
   (b) (v_n) géométrique de raison 3 : $v_n = 4 \times 3^n$
   (c) (w_n) géométrique de raison 2 : $w_n = 6 \times 2^n$
   (d) $u_n = v_n - w_n = 4 \times 3^n - 6 \times 2^n$