Chapitre 12 : Probabilités

Table des matières

1 Variable aléatoire

1.1 Notion de variable aléatoire

On considérera dans toute la première partie de ce cours une expérience aléatoire E qui consiste à jeter simultanément deux dés cubiques numérotés de 1 à 6.
Décrire l'univers Ω de cette expérience aléatoire.

Définition 1.

Si Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire (univers). On définit une *variable aléatoire* X sur Ω lorsqu'on associe à chaque issue un nombre réel. L'ensemble de ces nombres réels est l'*ensemble des valeurs* de la variable aléatoire, se note $X(\Omega)$.

Une variable aléatoire permet d'obtenir des nombres *réels* aléatoirement après n'importe quelle expérience aléatoire (ce qui n'est pas forcément le cas pour les issues).

Une variable aléatoire est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. On note $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

■ Exemple 1:

À partir de l'expérience précédente, on définit la variable aléatoire suivante : si la somme des dés est inférieure à 5, on perd 5€, si la somme est égale à 6, on perd 2€, si la somme est supérieure ou égale à 7, on gagne 10€. On définit la variable aléatoire X qui associe le gain algébrique (positif ou négatif) associé à l'expérience.

1.2 Événements liés à une variable aléatoire

Si X est une variable aléatoire sur Ω avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$. Chaque x_i est l'image d'un ou plusieurs éléments de Ω. On rappelle qu'un *événement* est un sous ensemble de Ω.

Définition 2.

- L'événement $\{X = x_i\}$ est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel x_i ;
- L'événement $\{X \leqslant x_i\}$ est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel inférieur ou égal à x_i.

■ Exemple 2:

Décrire l'événement $\{X = -5\}$.

Propriété 1.

Partition de Ω. Si X est une variable aléatoire dont l'espace image est $X(\omega) = \{x_1, \cdots, x_r\}$.
L'ensemble des événements $A_i = \{X = x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$ forme une partition de Ω.
Autrement dit, $\forall i \neq j$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ et $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{r} A_i = \Omega$

Remarque 1.

Les événements $X = x_1$ et $X = x_2$ sont *incompatibles* : ils ne peuvent pas être réalisés en même temps.

1.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 3.

Définir la loi de probabilité de la variable aléatoire X revient à donner toutes les probabilités associées aux événements $X = x_i$, $x_i \in X(\Omega)$.

■ Exemple 3:

Il est courant de définir une loi en dressant un tableau :

x_i	-5	-2	10
$P(X = x_i)$			

Propriété 2.

Si on pose $p_i = P(X = x_i)$, pour chaque x_i de $X(\Omega)$, alors on a :

$$\boxed{\sum_{x_i \in \Omega} p_i = \sum_{i=1}^{r} p_i = \dots}$$

▶ Exercice 1 Déterminer des lois

Dans chacun des cas suivants, déterminer la loi de la variable X.

1. Une urne contient 26 jetons sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet. On choisit 5 jetons simultanément et on note X le nombre de voyelles obtenues.
2. On range aléatoirement 20 paires de chaussettes dans 3 tiroirs (chaque tiroir ayant la même probabilité d'être choisi) et on note X le nombre de paires de chaussettes du premier tiroir.
3. On forme un jury de 6 personnes en les choisissant au hasard dans un groupe de 5 hommes et 4 femmes. On note X le nombre de femmes du jury.

2 Paramètres d'une variable aléatoire

2.1 Espérance mathématique

Définition 4.

On appelle *espérance mathématique* de la variable aléatoire X le nombre noté $\mathbb{E}(X)$ tel que :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{r} x_i P(X = x_i)}$$

Remarque 2.

C'est la .... des x_i pondérées par leurs probabilités.

Remarque 3.

Utilisation calculatrice (comme en stats) : $\mathbb{E}(X) = \overline{x}$

Remarque 4.

Interprétation de l'espérance mathématique :
L'espérance mathématique est le gain moyen que l'on peut espérer avoir au bout d'un grand nombre d'expériences.

- Si un jeu a une espérance nulle, alors le jeu est dit .... ;
- Si un jeu a une espérance positive, alors le jeu est .... au joueur ;
- Sinon, le jeu est .... au joueur.

2.2 Variance et écart-type

Définition 5.

La variance d'une variable aléatoire est la moyenne des carrés des écarts $(x_i - \mathbb{E}(X))$:

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{r} p_i \, (x_i - \mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big)$$

Propriété 3 (Formule de Koenig-Huygens).

Soit X une variable aléatoire pour laquelle $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ existent. On a alors

$$\boldsymbol{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

Définition 6.

L'écart-type est la racine carrée de la variance : $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}}$.

2.3 Variable $aX + b$

Définition 7.

Soit $a \neq 0$. Si $Z = aX + b$, alors Z prend toutes les valeurs $z_i = ax_i + b$, où $i \in \{1, \dots, n\}$, elle peut donc prendre autant de valeurs que X.
La loi de Z est « la même » que celle de X :

$$\boxed{P(Z = z_i) = P(X = x_i)}$$

■ **Exemple 4:**
Un jeu d'une loterie permet de gagner 5€ dans 20% des cas et 50€ dans un cas sur vingt. Si X est la variable aléatoire qui donne le gain, on a la loi suivante :

x_i	0	5	50
$P(X = x_i)$	**0,75**	0,2	0,05

Pour jouer à ce jeu, on doit payer 2€ et sur le gain effectué, on doit donner 20% des gains à l'état sous forme de taxe.
On peut donc considérer la variable G qui donne le gain algébrique : $G = 0{,}8(X-2) = 0{,}8X - 1{,}6$ dont la loi est donnée par le tableau suivant :

$g_i = 0,8x_i - 1,6$	$-1{,}6$	$2{,}4$	$38{,}4$
$P(G = g_i)$	$0{,}75$	$0{,}2$	$0{,}05$

Si X est une variable aléatoire sur un univers Ω. $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, alors quels que soient les nombres réels a et b, on peut définir une nouvelle variable aléatoire qui, à chaque issue donnant la valeur x_i, associe le réel $ax_i + b$. On note cette nouvelle variable aléatoire $aX + b$.

Propriété 4.

Si X est une variable aléatoire d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de variance $V(X)$, alors

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{E}(aX+b) = \dots\dots \qquad V(aX+b) = \dots\dots$$

3 Loi Binomiale

3.1 Loi de Bernoulli

Définition 8 (Épreuve de Bernoulli).

Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues : l'une appelée succès (S) de probabilité p et l'autre appelée échec ($\overline{S}$) de probabilité $q = 1 - p$.

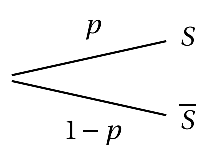
■ Exemple 5:
On lance un dé cubique équilibré et on appelle succès l'événement « Obtenir un 6 ».
Cette expérience est une épreuve de Bernoulli avec $p = \dfrac{1}{6}$

Définition 9.

Dans une épreuve de Bernoulli, on note Y la variable aléatoire qui prend la valeur 1 lorsque S est réalisé et 0 sinon. On dit alors que Y suit une *Loi de Bernoulli de paramètre p*.

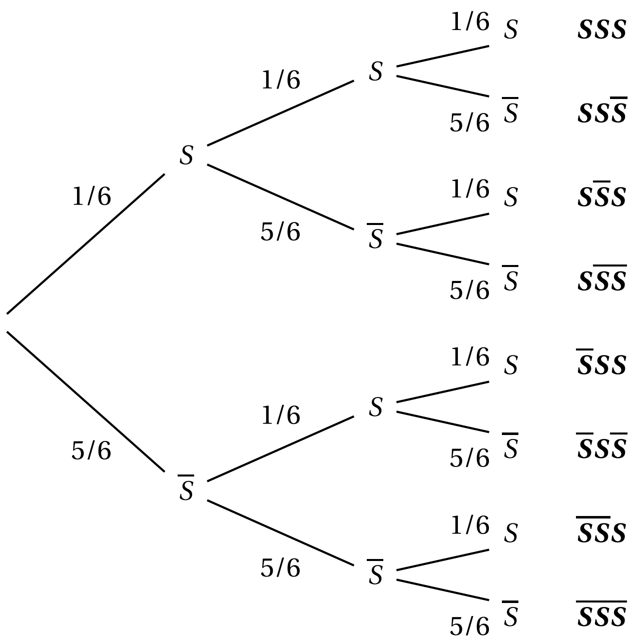
k	0	1
$p(Y=k)$	p	$1-p$

On peut représenter la situation sous la forme d'un arbre à 1 nœud :



3.2 Étude d'un exemple de répétition

On lance trois fois de suite un dé cubique équilibré et on s'intéresse au nombre de sorties du numéro 6. Cette expérience est la répétition à l'identique de trois épreuves de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$ de l'exemple précédent. On construit alors l'arbre pondéré correspondant à l'expérience :



On peut compter le nombre de chemins conduisant à 0 Succès, 1 Succès, etc...

Nb Succès	0	1	2	3
Nb Chemins	1	3	3	1

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de Succès dans l'expérience. Alors X suit la loi de probabilité suivante :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$	$3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$	$3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1$	$1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3$

3.3 Schéma de Bernoulli d'ordre n

Définition 1
On appelle *schéma de Bernoulli* d'ordre n l'expérience aléatoire qui est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

C'est une généralisation à l'ordre n de l'exemple précédent.

Définition 2
Le nombre de chemins de l'arbre associé à un schéma de Bernoulli d'ordre n conduisant à k succès est un nombre entier appelé *coefficient binomial* qui se note $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n »

■ **Exemple 6:**

Dans l'exemple précédent, on a 3 chemins conduisant à 2 succès dans l'expérience à 3 épreuves. On a donc :

$$\binom{3}{2} = 3$$

Remarque 1

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ permet de dénombrer (compter) le nombre de façons de placer les k S dans une succession de n lettres. Cela correspond au nombre de possibilités pour choisir k éléments dans un ensemble en contenant n.

Remarque 2

Pour le calculer, deux possibilités :

- À la calculatrice, on utilise la commande `math`, puis l'onglet `prob`, c'est la commande **binom** ou **nCr**. On l'utilise en tapant

  $$n \textbf{ binom } k$$

- À la main, on calcule $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$.

$$\binom{7}{4} = \frac{7\times 6\times 5\times 4}{4\times 3\times 2\times 1} = 35$$

Définition 3

On considère un schéma de Bernoulli d'ordre n où chaque épreuve a une même probabilité de succès égale à p. Si X est la variable aléatoire donnant le nombre de succès au cours des n expériences, alors on dit que X suit une *Loi Binomiale de paramètres n et p.*

Ainsi, quel que soit k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

■ **Exemple 7:**

Dans l'exemple du 3.1, $X \sim \mathscr{B}(3, \frac{1}{6})$

► Exercice 2 **Utiliser la loi binomiale**

Un conseiller commercial en informatique reçoit huit clients par jour. On admet que la probabilité qu'un client passe commande est de 0,1 et que les décisions des clients sont indépendantes les unes des autres.

On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de commandes que le conseiller obtient par jour.

1. Justifier que X suit une loi binomiale.
2. Quelle est la probabilité (à 10^{-4} près) qu'il obtienne :
   (a) deux commandes ?
   (b) moins de deux commandes ?

► Exercice 3 **Re-**

Une urne contient trois fois plus de boules moires que de boules blanches.

1. On tire au hasard une boule. Quelle est la probabilité qu'elle soit noire ?

2. On tire à présent trois boules successivement et avec remise.
   On note N la variable aléatoire qui indique le nombre de boules noires obtenues lors de la série de trois tirages.
   (a) Justifier que N suit une loi binomiale et préciser les paramètres.
   (b) Donner la loi de probabilité de N.
   (c) En déduire la probabilité d'obtenir au moins deux boules blanches.

3.4 Espérance, variance, écart-type

Théorème 1 (admis)
Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = np \qquad V(X) = np(1-p) = npq \qquad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

▶ Exercice 4 — Propriétés de l'espérance

Un fabricant produit et vend 125 tondeuses par mois. Le coût de fabrication est de 160€ par machine. Le fabricant fait réaliser un test de conformité, dans les mêmes conditions, sur chacune de ses machines. Le test est positif pour une tondeuse dans 92% des cas ; ainsi la tondeuse est conforme et est vendue 250€. Si le test est négatif, la tondeuse est bradée à un sous-traitant au prix de 100€.

1. On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de tondeuses conformes parmi les 125 tondeuses produites.
   Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
2. On note Y la variable aléatoire qui indique le bénéfice mensuel en euros.
   (a) Exprimer Y en fonction de X.
   (b) En déduire $\mathbb{E}(Y)$. Interpréter ce résultat.

3.5 Retour sur les coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux sont les nombres du triangle de Pascal :

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 \xrightarrow{+} & 1 & & \\
 & & & = \downarrow & & \\
1 & 4 \xrightarrow{+} & 6 & 4 & 1 & \\
 & & = \downarrow & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}
$$

Le nombre $\binom{n}{k}$ est situé à la ligne n, colonne k, sachant qu'on commence à numéroter à 0.

Ainsi, $\binom{0}{0} = 1$ et $\binom{5}{3} = 10$.

Théorème 2 (Symétrie)
Pour tous les nombres entiers n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Démonstration

Supposons que $0 \leqslant k \leqslant n$. Choisir k succès parmi n épreuves équivaut à choisir $n-k$ échecs parmi n épreuves. Or il y a autant de façons de choisir t succès ou t échecs. On a donc bien $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

□

Théorème 3 (Formule de Pascal)
Pour tous les nombres entiers n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration

On suppose $0 \leqslant k \leqslant n-1$. On considère l'arbre associé au schéma de Bernoulli d'ordre $n+1$.
Les chemins conduisant à $k+1$ succès parmi les $n+1$ répétitions sont de deux types :

- Ceux qui se terminent par un succès S. Type A
- Ceux qui se terminent par un échec $\overline{S}$. Type B

Comptons les chemins de type A :
Les chemins de type A comportent k succès parmi les n premières répétitions, il y a donc $\binom{n}{k}$.

Comptons les chemins de type B :
Les chemins de type B comportent $k+1$ succès parmi les n premières répétitions, il y a donc $\binom{n}{k+1}$.

On a donc bien $\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$.

□

Remarque 3
C'est cette propriété que l'on applique pour construire le triangle de Pascal « de proche en proche ».

4 Somme de variables aléatoires

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, X et Y deux variables aléatoires sur l'univers Ω.
$X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_m\}$.

On connaît les lois des variables X et Y : on connaît les valeurs des probabilités des événements $\{X = x_i\}$ et $\{Y = Y_j\}$, pour tous $(i, j) \in [\![1 ; n]\!] \times [\![1 ; m]\!]$

4.1 Variable $Z = X + Y$

Définition 10.

La variable aléatoire $Z = X + Y$ prend toutes les valeurs $x_i + y_j$, avec $(i, j) \in [\![1 ; n]\!] \times [\![1 ; m]\!]$.
Soient les z_k les valeurs de Z : $Z(\Omega) = \{z_1, \cdots, z_p\}$.
La loi de Z est donnée par, si $A_k = \{(i, j) \in [\![1 ; n]\!] \times [\![1 ; m]\!] \mid x_i + y_j = z_k\}$

$$\boxed{P(Z = z_k) = \sum_{(i,j)\in A_k} P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})}$$

Remarque 5 (Structure des A_k).

Les A_k forment une partition de $[\![1 ; n]\!] \times [\![1 ; m]\!]$.

▶ Exercice 5

Une urne contient 3 boules. Deux portent le nombre 10 et une le nombre -3.
Une deuxième urne contient 7 boules : cinq avec le nombre 3 et deux avec le nombre 0.
On tire une boule dans chaque urne.

X est la variable aléatoire donnant la valeur de la boule donnée par la première urne et Y celle issue de la deuxième urne.

Donner la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

4.2 Linéarité de l'espérance

Propriété 5 (linéarité de l'espérance (admise)).

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même univers Ω.

$$\boxed{\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)}$$

<u>Démonstration</u>

Démonstration

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, avec $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_m\}$.
On sait que les familles d'événements $\{X = x_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ et $\{Y = y_j\}_{j\in\{1,\dots,m\}}$ forment des systèmes complets d'événements (des partitions de Ω.

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i P((X = x_i) \cap \Omega) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i P\left((X = x_i) \cap \bigcup_{j=1}^{n} (Y = y_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i P\left(\bigcup_{j=1}^{n} \big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) \\
\mathbb{E}(X) &= \sum_{(i,j)\in[\![1\,;n]\!]\times[\![1\,;m]\!]} x_i P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)
\end{aligned}$$

De même, on a $\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1\,;n]\!]\times[\![1\,;m]\!]} y_j P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$
Ainsi $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1\,;n]\!]\times[\![1\,;m]\!]} x_i + y_j P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$.

On pose donc $Z = X + Y$, avec $Z(\Omega) = \{z_1, \cdots, z_p\}$ et $\mathbb{E}(Z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} z_k P(Z = z_k)$.
On pose également, pour tout $k \in [\![1\,; p]\!]$, $A_k = \{(i, j) \in [\![1\,; n]\!] \times [\![1\,; m]\!]$ tels que $z_k = x_i + y_j\}$.
La famille des A_k forme une partition de $[\![1\,; n]\!] \times [\![1\,; m]\!]$

En regroupant les termes de la somme précédente, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) &= \sum_{(i,j)\in[\![1\,;n]\!]\times[\![1\,;m]\!]} (x_i + y_j) P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{(i,j)\in A_k} \underbrace{(x_i + y_j)}_{z_k} P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{p} z_k \sum_{(i,j)\in A_k} \underbrace{P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)}_{P(X+Y=z_k)} \\
&= \sum_{k=1}^{p} z_k P(Z = z_k) \\
\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(Z)
\end{aligned}$$

□

□

■ Exemple 8:
On lance deux dés cubiques équilibrés, X représente la valeur du dé n° 1 et Y du dé n° 2.

La somme des deux dés est une variable aléatoire $Z = X + Y$.
La valeur moyenne de Z est 7 alors que la loi de Z n'est pas uniforme.
En effet, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \dfrac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5$ et $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 7$.

5 Variables aléatoires indépendantes

5.1 Succession d'épreuves aléatoires indépendantes

On effectue une succession de deux épreuves aléatoires indépendantes , ainsi le résultat de la première n'influe pas sur la seconde.
On pose X et Y deux variables aléatoires définies sur les univers des deux épreuves respectivement.
On dit alors que les deux variables aléatoires sont *indépendantes*.

C'est la « définition » préconisée par le programme, ce n'est pas la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires

Conséquence 1 (En pratique).

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, avec $X(\Omega_1) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ et $Y(\Omega_2) = \{y_1, \cdots, y_m\}$, alors pour tous $(i, j) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; m]\!]$, les événements $\{X = x_i\}$ et $\{Y = y_j\}$ sont indépendants, autrement dit :

$$\boxed{P\left(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\right) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)}$$

■ **Exemple 9:**
On lance deux dés. L'un à quatre faces, numérotées de 1 à 4 et l'autre, à six faces, numérotées 0, 3, 3, 6, 6, 6.
X représente le numéro sur le premier dé et Y sur le second.

$$P(\{X = 1\} \cap \{Y = 3\}) = P(X = 1) \times P(Y = 3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

5.2 Variance

Un rappel, la variance d'une variable aléatoire est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

Propriété 6 (Variance de $aX + b$).

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$$

En particulier,

$$\boxed{\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)}$$

Démonstration

Pour tout $b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X+b) &= \mathbb{E}\left(((X+b)-\mathbb{E}(X+b))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((X+b-\mathbb{E}(X)-b)^2\right) && \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) \\
&= \mathbb{V}(X)
\end{aligned}$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(aX) &= \mathbb{E}\left((aX-\mathbb{E}(aX))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((aX-a\mathbb{E}(X))^2\right) && \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= \mathbb{E}\left(a^2(X-\mathbb{E}(X))^2\right) \\
&= a^2\mathbb{V}(X)
\end{aligned}$$

On a donc, pour tous a et b réels, $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

□

Nous admettrons la propriété suivante. La démonstration est assez ardue. J'en ai reporté une en annexe.

Propriété 7 (Variance de la somme dans le cas d'indépendance).

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**.
On a $\boxed{\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)}$

$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ dans le cas de VA indép

Propriété 8.

Si X et Y sont indépendantes, $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $Y(\Omega) = \left\{y_1, \cdots, y_m\right\}$, alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Démonstration

Si on pose $Z = XY$, $Z(\Omega) = \{z_1, \cdots, z_p\}$.
On pose, comme précédemment, $A_k = \{(i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;m]\!]$ tels que $x_i y_j = z_k\}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{k=1}^{p} z_k P(Z = z_k) && (1)\\
&= \sum_{k=1}^{p} x_i y_j \sum_{(i,j)\in A_k} P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) && (2)\\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \sum_{(i,j)\in A_k}}_{\sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;m]\!]}} x_i y_j P(X = x_i) P(Y = y_j) && (3)\\
&= \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;m]\!]} x_i P(X = x_i) y_j P(Y = y_j) && (4)\\
&= \sum_i x_i P(X = x_i) \times \sum_j y_j P(Y = y_j) && (5)\\
&= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) && (6)
\end{aligned}$$

On passe de (2) à (3) par l'indépendance et pour passer de (4) à (5), on peut voir cette factorisation comme l'écriture des termes d'un rectangle par le produit de ses termes marginaux.

□

Variance de la somme dans le cas de VA indépendantes

Nous allons montrer que $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$ si X et Y sont indépendantes. On va utiliser à volonté la linéarité de l'espérance.

Démonstration

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X+Y) &= \mathbb{E}\big((X+Y-\mathbb{E}(X+Y))^2\big)\\
&= \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X)+Y-\mathbb{E}(Y))^2\big)\\
&= \mathbb{E}(X-\mathbb{E}(X))^2 + \mathbb{E}(Y-\mathbb{E}(Y))^2 + 2\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)))\\
&= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{E}(XY - X\mathbb{E}(Y) - Y\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))\\
&= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\big(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y)) - \mathbb{E}(Y\mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))\big)\\
&= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\left(\underbrace{\mathbb{E}(XY)}_{\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)} - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right)\\
&= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)
\end{aligned}$$

□

5.3 Application à la loi binomiale

Propriété 9.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Alors

$$\mathbb{E}(X) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = p(1-p)$$

Démonstration

Loi de X :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$(1-p)$	p

On a donc $\mathbb{E}(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$.
Pour la variance, on utilise la formule de König-Huygens :

$$\underline{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

On a la loi de X^2 :

x_i^2	0^2	1^2
$P(X^2 = x_i^2)$	$(1-p)$	p

Et donc $\mathbb{E}(X^2) = p$.
Ainsi $\mathbb{V}(X) = p - p^2 = p(1-p)$

□

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors on peut noter X_i (avec $i \in [\![1;n]\!]$) la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès à la i-ème épreuve.
Chaque X_i suit alors une loi de Bernoulli de paramètre p et chaque variable X_i est indépendante des autres, par définition de la loi binomiale.

On a alors

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

(une loi binomiale est une somme de bernoullis indépendantes)

Propriété 10 (Paramètres de la loi binomiale).

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.
On a alors

$$\mathbb{E}(X) = np \qquad \mathbb{V}(X) = np(1-p) \qquad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$