

Correction DS n°7 CPES

Exercice 1:

$$1^o) 3z + 1 - 2i = 4 - 3i - 2iz$$

$$\Leftrightarrow z(3 + 2i) = 3 - i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(3-i)(3-2i)}{13}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{7 - 9i}{13}$$

$$2^o) \bar{z} = iz$$

$$\text{On pose } z = a + ib$$

$$a - ib = i(a + ib)$$

$$\Leftrightarrow a - ib = ia - b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = -b \end{cases}$$

$$\mathcal{Y} = \{z = a + ib \in \mathbb{C} \mid \text{tel que } a = -b\}$$

$$3^o) \bar{z} - 1 = z\bar{z} - i \quad z = a + ib$$

$$\Leftrightarrow a - ib - 1 = a^2 + b^2 - i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = a^2 + b^2 \\ -b = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a^2 - a + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta < 0 \text{ donc } a^2 - a + 2 \text{ n'a}$$

$$\text{pas de solution réelle donc } \mathcal{Y} = \emptyset$$

$$4^o) z^2 - z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4 = -3$$

$$z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 2

$$\begin{cases} u_0 \in]0, 1[\\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n) \end{cases}$$

$$1^o) f: x \mapsto x(2-x) \text{ dérivable sur } \mathbb{R}$$

$$f'(x) = -2x + 2 = -2(x-1) \text{ donc}$$

x	0	1
f'(x)	+	0
f(x)	0	1

donc f est bien croissante sur [0, 1]

$$2^o) \text{ Soit } P_n: \hat{=} 0 < u_n < 1$$

$$\text{Init: } u_0 \in]0, 1[\text{ donc } P_0 \text{ vraie}$$

$$\text{Hered: Soit } n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ vraie.}$$

$$\begin{aligned} 0 < u_n < 1 &\Rightarrow f(0) < f(u_n) < f(1) \\ 0 < u_{n+1} < 1 &\text{ donc } P_{n+1} \text{ vraie.} \end{aligned}$$

Ann: P_n est vraie au rang 0 et héréditaire donc d'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$
 $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$

3°) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = u_n(2 - u_n) - u_n$$

$$= u_n(2 - u_n - 1)$$

$$= u_n(1 - u_n) \quad \text{car comme } 0 < u_n < 1$$

$$u_n > 0$$

$$1 - u_n > 0$$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$ Ann: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$

Donc (u_n) est croissante

Exercice 3

1°) z vérifie l'équation $z^2 + iz + 1 = 0$

si $\bar{z}$ est aussi solution alors $\bar{z}^2 + i\bar{z} + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 - iz + 1 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{on a donc } z^2 + iz + 1 = 0 \\ \text{et } z^2 - iz + 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \begin{array}{l} iz = -iz \\ \Leftrightarrow z = -z \\ \Leftrightarrow z = 0 \end{array}$$

car $0^2 + i \cdot 0 + 1 \neq 0$ donc $\bar{z}$ n'est pas solution (contradiction)
 l'affirmation est fautive

2°) $z \in \mathbb{C}$. $z^2 + \bar{z}^2 = z^2 + \overline{z^2} \in \mathbb{R}$ par propriété
 $z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$

donc $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 + \bar{z}^2 + z\bar{z} \in \mathbb{R}$. l'affirmation est vraie

3°) Si $z^3 + z^2 + 1 - i = 0$ admet une solution réelle x_0 ,
on aura $\underbrace{x_0^3 + x_0^2 + 1}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{i}_{\notin \mathbb{R}}$ contradictoire

Donc l'affirmation est fautive.

Exercice 4

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 3 \\ z_1 \times z_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les solutions de l'équation } z^2 - 3z + 5 = 0$$

$$\Delta = 9 - 20 = -11 \rightarrow z_1 = \frac{3 - i\sqrt{11}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{3 + i\sqrt{11}}{2}$$

Exercice 5

$$P(z) = z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2}$$

$$1^\circ) P(i\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}i - (2 + i\sqrt{2})(-2) + (2 + 2i\sqrt{2})i\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$$

$$= -\cancel{2\sqrt{2}i} + 4 + \cancel{2\sqrt{2}i} + 2\sqrt{2}i - 4 - \cancel{2\sqrt{2}i} = 0$$

Donc $i\sqrt{2}$ est une racine du polynôme.

$$2^\circ) \text{ Ainsi } P(z) \text{ s'écrit } P(z) = (z - i\sqrt{2})(az^2 + bz + c)$$

$$\begin{array}{r|l} \text{Division: } z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2} & z - i\sqrt{2} \\ - \underline{z^3 - i\sqrt{2}z^2} & z^2 - 2z + 2 \\ -2z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2} & \\ - \underline{-2z^2 + 2\sqrt{2}iz} & 2z - 2i\sqrt{2} \\ & \underline{2z - 2i\sqrt{2}} \\ & 0 \end{array}$$

$$\text{Ainsi } P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 - 2z + 2)$$

$$3^o) P(z) = 0 \Leftrightarrow z - i\sqrt{2} = 0 \text{ ou } z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$\Delta = -4$$

$$\Leftrightarrow z = i\sqrt{2} \text{ ou } z = \frac{2-2i}{2} \text{ ou } z = \frac{2+2i}{2}$$

$$\mathcal{S} = \{ i\sqrt{2}; 1-i; 1+i \}$$

Exercice 6

$$z \neq -1 \quad f(z) = \frac{iz}{z+1}$$

$$1^o) f\left(-\frac{1}{2} + i\right) = \frac{-\frac{1}{2}i - 1}{\frac{1}{2} + i} = \frac{(-1 - \frac{1}{2}i)(\frac{1}{2} - i)}{\frac{5}{4}} = \frac{-1 + \frac{3}{4}i}{\frac{5}{4}} = \frac{-4 + 3i}{5}$$

$$2^o) f(z) = z \Leftrightarrow \frac{iz}{z+1} = z \quad \text{s. } z \neq -1$$

$$\Leftrightarrow iz = z(z+1)$$

$$\Leftrightarrow z^2 + z - iz = 0$$

$$\Leftrightarrow z(z+1-i) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = -1+i$$

$$3) z = x+iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$a) f(z) = \frac{i(x+iy)}{x+1+iy} = \frac{(-y+ix)(x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)}$$

$$= \frac{-(x+1)y + xy + i(x(x+1) + y^2)}{(x+1)^2 + y^2} = \frac{-y + i(x^2 + y^2 + x)}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\text{donc } \operatorname{Im}(f(z)) = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$b) f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x = 0 \text{ et } (x+1)^2 + y^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \text{ et } (x, y) \neq (-1, 0)$$

$$c) \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{C}\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Ainsi } f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y) \in \text{Cercle de centre } \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \text{ de rayon } \frac{1}{2} \text{ privé du point } (-1, 0)$$