Chapitre 10 : Intégrales et primitives

Table des matières

1 Équations différentielles

1.1 Équations différentielles de la forme $y' = ay$ (homogènes)

Propriété 1.

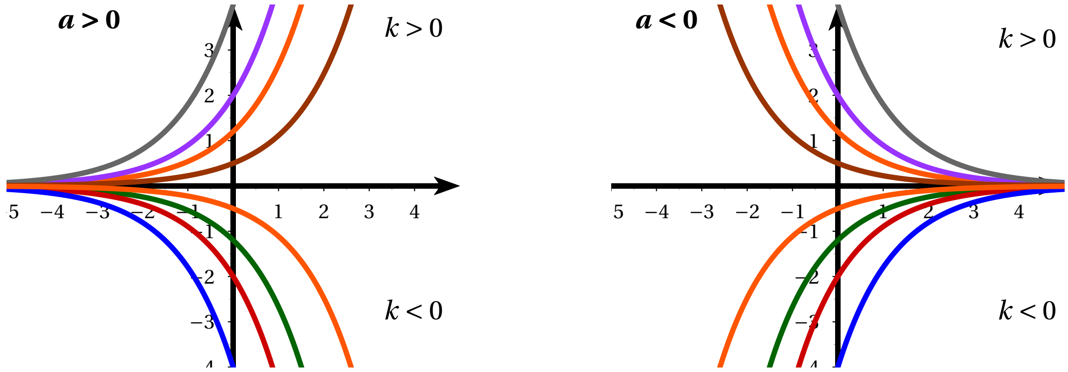
Les fonctions solutions de l'équation différentielle (H) $y' = ay$, où $a \in \mathbb{R}^*$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax}$ où k est un nombre réel.

<u>Démonstration</u>

lien : **VIDEO** Le son est moyen, mais c'était ma première...

□

Allures des courbes des fonctions du type $x \mapsto ke^{ax}$



Propriété 2 (Structure de l'ensemble des solutions de (H)).

Soient f et g deux solutions de l'équation différentielle $(\boldsymbol{H})$ $y' = ay$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + g$ est également solution de l'équation $(\boldsymbol{H})$.

Remarque 1.

On dit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\boldsymbol{H})$ est un espace vectoriel.

▶ Exercice 1

1. Résoudre

   (a) $H_1 : y' + \dfrac{1}{3}y = 0$

   (b) $H_2 : 4y' + 5y = 0$

2. Déterminer la solution f de l'équation H_2 telle que $f(1) = 2$.
   Quelle est la conséquence sur les solutions de l'existence de cette contrainte : $f(1) = 2$?

1.2 Équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ (avec second membre)

Propriété 3.

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et b un réel quelconque sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où k est un nombre réel.

▶ Exercice 2 — Application bêbête

Résoudre les équations suivantes :

1. $y' = 2y + 1$
2. $y' = -5y + 2$
3. $y' + y = 3$
4. $4y' + y - 5 = 0$

▶ Exercice 3 — Équation de la forme $y' = ay + f$

On considère l'équation différentielle **(E)** $y' = 2y - x$

1. Chercher une fonction affine g solution de l'équation **(E)** [1].
2. Si f est une solution de l'équation **(E)**, en utilisant la fonction $f-g$, déterminer toutes les solutions de (E).

Remarque 2 (Méthode générale de résolution de l'équation $y' = ay + f$).

- On cherche une solution particulière f_p de l'équation. Il existe des techniques pour en trouver, mais en Terminale, on les propose seulement, il suffit de vérifier qu'elles sont bien solutions.
- On remarque que si f est solution de l'équation, alors $f - f_p$ est solution de l'équation (H) : $y' = ay$.
- On conclut que les solutions de l'équation (E) sont composées d'une solution de (H) plus une solution particulière :

$$f(x) = ke^{ax} + f_p$$

2 Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

2.1 Équations différentielles de la forme $y' = f$

Théorème 1 ($\boldsymbol{y' = f}$ (admis)).

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
L'équation $y' = f$ admet une solution F sur l'intervalle I. Cette fonction F est dérivable sur I et sa dérivée est f. On l'appelle *fonction primitive de f*.

<u>Démonstration</u>

Le point admis dans ce théorème est l'existence d'une solution à l'équation (existence d'une fonction F telle que $F' = f$ lorsque f est continue sur I). Cette existence sera démontrée dans le prochain portant chapitre sur le calcul intégral, dans un cas particulier de fonction continue f (monotone, positive)

□

Remarque 3 (non unicité de la solution).

l'équation différentielle $y' = f$ admet une infinité de solutions.
Si F et G sont solutions de l'équation différentielle, alors il existe un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + \lambda$.

On dit que deux primitives diffèrent d'une constante.

1. $g : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

Théorème 2 (Équation avec condition initiale).

Soit l'équation différentielle $y' = f$ où f est une fonction continue sur un intervalle I.
Pour un nombre $x_0 \in I$ et un réel y_0, il existe une unique fonction F solution de l'équation telle que $F(x_0) = y_0$

Exemple 1:

L'équation différentielle $y' = x^2$ admet plusieurs solutions sur $\mathbb{R}$:

$$F : x \mapsto \frac{x^3}{3} \qquad G : x \mapsto \frac{x^3}{3} + 2 \qquad H : x \mapsto \frac{x^3}{3} - 1$$

Par contre, l'équation différentielle $\begin{cases} y' &= x^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$:

$$S : x \mapsto \frac{x^3}{3} + 1$$

2.2 Tableau des primitives des fonctions usuelles

⚠Toutes les primitives sont définies à une constante réelle c près.

Fonction f	Primitive F	Intervalle I
k (constante)	$kx + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
x^n $(n \in \mathbb{N} \backslash \{-1 ; 0\})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } n \geqslant 1 \\ ]-\infty ; 0[\text{ ou }]0 ; +\infty[\text{ sinon} \end{cases}$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z})$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$]0 ; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0 ; +\infty[$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$

▶ **Exercice 4** **Exemples fondamentaux**

1. Déterminer une primitive des fonctions définies par $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$.
2. Donner une primitive de la fonction définie par $h(x) = 3x^2 - 7x + 2$.

2.3 Utiliser les formules de composées

Propriété 4 (À partir des formules de composition).

La primitive d'une fonction de la forme $x \mapsto u'(x)(f \circ u)(x)$ est de la forme $x \mapsto f \circ u + c$

Fonction f	**Primitives F**	**Conditions sur u**
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1;0\})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	$u(x) \neq 0$ sur I si $n \leq -2$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert) + c$	$u(x) \neq 0$ sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$	$u(x) \neq 0$ sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$u(x) > 0$ sur I.
$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + c$	—

■ **Exemple 2:**
La primitive de la fonction définie par $f(x) = -4\mathrm{e}^{2x}$ est de la forme F avec $F(x) = -2\mathrm{e}^{2x} + c$.

2.4 Intégration par parties

Comme pour la dérivation, il faut bien retenir que la primitive d'un produit n'est pas le produit des primitives.

Propriété 5 (Intégration par parties).

Soient u et v deux fonctions qui admettent des dérivées u' et v' continues sur l'intervalle $[a;b]$. Alors $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$

Démonstration

uv est une primitive de $u'v + uv'$
Donc $[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$. D'où la propriété.

□

▶ Exercice 5

Calculer $\int_0^1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ en utilisant une intégration par parties.

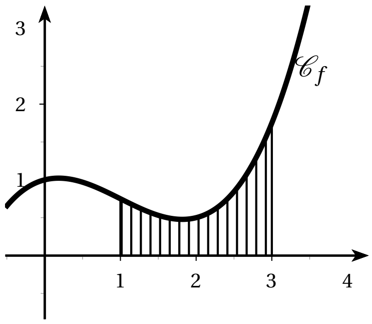
3 Intégrale d'une fonction continue positive sur un segment

3.1 Définition

Définition 1 (Intégrale d'une fonction positive).

Étant donnée une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. On appelle *intégrale de f sur $[a;b]$* la mesure de l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

On note cette aire : $I=\int_a^b f(x)dx$. Elle est mesurée en unité d'aires du repère.



NOTATION :
Le symbole $\int$ est un S déformé, qui se lit « intégrale » ou « somme » (c'est une somme des tout petits rectangles de hauteur $f(x)$ et de largeur dx).

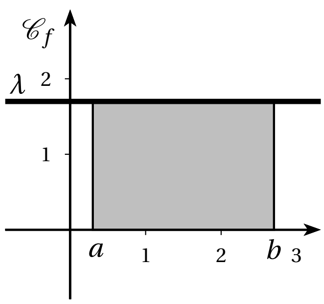
Remarque 4.

La variable x peut-être remplacée dans l'intégrale par n'importe quelle lettre : t, u, on dit que c'est une *variable muette* :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$$

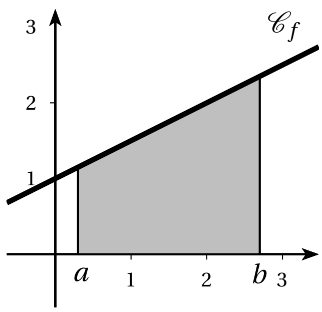
3.2 Quelques exemples

f est constante sur $[a;b]$: $f(x)=\lambda$



$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t= \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

f est affine sur $[a;b]$:



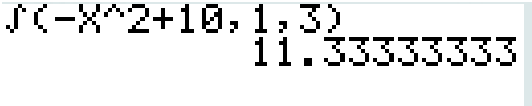
L'aire du trapèze est :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

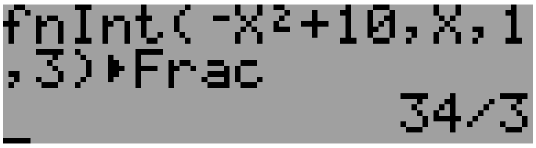
3.3 Calcul approché à l'aide de la calculatrice :

Si on prend une fonction continue et positive sur un intervalle, on peut faire calculer l'intégrale de la fonction par la calculatrice. Par exemple la fonction $f\ :\ x\mapsto -x^2+10$ entre 1 et 3 :

Sur CASIO 85+, dans le menu $\boxed{\texttt{OPTN}}$, $\boxed{\texttt{F4}}$ (Calc)



Sur TI 83 dans le menu $\boxed{\texttt{math}}$, $\boxed{9}$ (FnInt)



4 Fonction primitive

4.1 Fonction définie par une intégrale

Théorème 3 (Définition d'une primitive).

Soit f une **fonction continue positive** sur un intervalle $[a;b]$, On peut alors définir la fonction F sur $[a;b]$ telle que $\boxed{F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}$.

Cette fonction F est alors dérivable sur $[a;b]$ de dérivée égale à f.

F est appelée *primitive de f sur* $[a;b]$.

Démonstration

Nous allons prouver ce théorème dans le cas particulier où f est positive et croissante

Soit $x\in[a;b]$, on écrit le taux d'accroissement de F entre x et $x+h$:

$$\Delta_x(h) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))$$

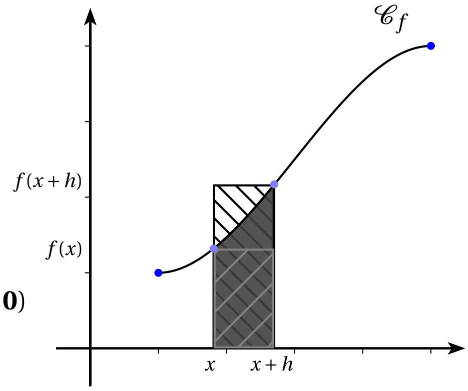
Si $h>0$

$F(x+h)-F(x)$ représente l'aire grise, sous la courbe de f entre x et $x+h$.

Comme f est croissante, cette aire est comprise entre les rectangles d'aire $h\times f(x)$ et $h\times f(x+h)$.

On a donc

$$\begin{aligned} & hf(x)\leqslant F(x+h)-F(x)\leqslant hf(x+h) \\ \iff & f(x)\leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h}\leqslant f(x+h) \quad (\boldsymbol{h>0}) \\ \iff & f(x)\leqslant \Delta_x(h)\leqslant f(x+h) \end{aligned}$$



Comme f est continue en x, $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$ et d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0}\Delta_x(h)=f(x)$

Ainsi pour tout $x\in I$, F est dérivable et sa dérivée est :

$$\boxed{F'(x)=f(x)}$$

□

Remarque 5.

- La fonction F est croissante sur $[a;b]$... *Pourquoi ?*
- $F(a)=0$. *Pourquoi ?*

4.2 Définition d'une primitive

Définition 2 (Primitive d'une fonction continue).

Pour toute fonction f continue sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$, on appelle *fonction primitive* de f une fonction F telle que, pour tout $x\in I$, $F'(x)=f(x)$.

Théorème 4 (Existence de primitives).

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive.

On a vu, lors de la propriété précédente, que pour toute fonction f continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ fermé borné, $x\mapsto\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f définie sur $[a;b]$.

■ Exemple 3:

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2+x$, alors on peut dire que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
De plus, comme $g(0)=0$, on peut dire que $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est **la** primitive de f qui s'annule en 0.

Remarque 6.

Si F est une primitive de f, alors, pour tout nombre réel k, $F+k$ est aussi une primitive de f.
Autrement dit, deux primitives d'une fonction f diffèrent seulement d'une constante.

Quelle est la conséquence graphique sur les courbes des primitives d'une fonction continue f ?

Par contre, si toute fonction continue admet une primitive, on ne sait pas toujours exprimer celle-ci à l'aide des fonctions usuelles. Par exemple : $x\mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, qui est facile à dériver, que l'on rencontrera lors des chapitres sur les lois de probabilités continues, mais qui n'admet pas de primitive exprimable avec des fonctions usuelles. Pour calculer des intégrales avec cette fonction, on devra utiliser des méthodes numériques du même type de l'approximation des intégrales par des rectangles (ou autres).

Théorème 5 (Condition d'unicité).

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I=[a;b]$.
Pour tout $x_0\in I$ et tout $y\in\mathbb{R}$, il existe une unique fonction primitive G de f telle que $G(x_0)=y_0$.

4.3 Lien entre primitives et intégrales

Théorème 6 (Théorème fondamental de l'intégration).

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

4.4 Propriétés des intégrales

Propriété 6 (Linéarité).

- **Primitive de la somme** Si F et G sont des primitives des fonctions f et g, alors $F+G$ est une primitive de la fonction somme $f+g$.
- **Multiplication par une constante** Si F est une primitive de f sur I et k un nombre réel quelconque, alors kF est une primitive de kf sur I.

Conséquence 1 (Linéarité de l'intégrale).

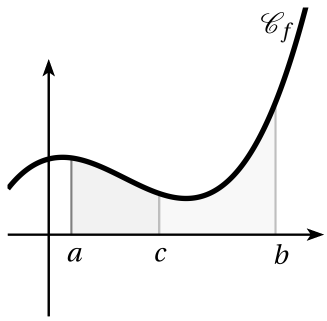
Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$, et λ un nombre réel, alors

- $\int_a^b f(x)+g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Propriété 7 (Relation de Chasles).

Soit f continue sur $I = [a\ ;\ b]$. Si $c \in I$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$



On utilisera dans de nombreux exercices la propriété suivante :

Propriété 8 (Positivité de l'intégrale).

Sur un intervalle $[a;b]$

- si $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f \geqslant 0$
- si $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

■ Exemple 4:

Comparer, sans les calculer, les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$$

Méthode 1 (Application aux suites d'intégrales)

On considère la suite (I_n) définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{x^2}\mathrm{d}x$.

1. Conjecturer graphiquement, ou à l'aide de la calculatrice, visualiser la situation.
2. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$, en déduire la limite.

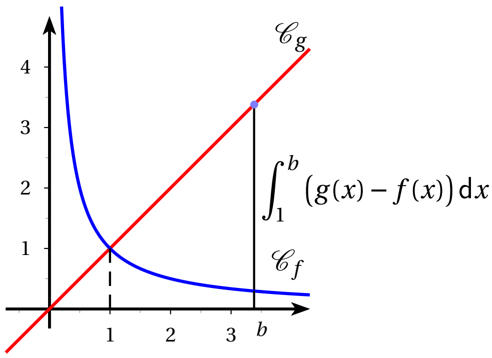
5 Applications

5.1 Aire entre deux courbes

Propriété 9.

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur I telles que $f \leqslant g$. Alors l'aire du domaine délimité par la courbe de f en bas, la courbe de g en haut et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par l'intégrale :

$$A = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

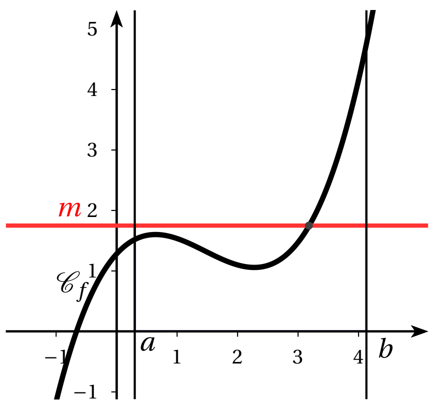


5.2 Valeur Moyenne

Définition 3.

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle Si f est une fonction continue sur l'intervalle I, alors on appelle *valeur moyenne de f sur I* le nombre réel

$$\boxed{m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$



Colorer les aires identiques