Chapitre 9 : Limites de Suites

Table des matières

1 Limite d'une suite **1**
1.1 Limite finie . . . 1
1.2 Limite infinie . . . 2
1.3 Suites sans limites . . . 3

2 Opérations sur les limites **3**
2.1 Somme . . . 3
2.2 Produit . . . 4
2.3 Inverse . . . 4

3 Limites et comparaisons **4**
3.1 Bornitude . . . 4
3.2 Théorème des gendarmes . . . 5
3.3 Théorème dit « de comparaison » . . . 5
3.4 Suites géométriques . . . 6

4 Limites et monotonie **7**
4.1 Théorème de convergence monotone . . . 7
4.2 Suites adjacentes . . . 8

1 Limite d'une suite

1.1 Limite finie

Définition 1 (Suite convergente).

On dit qu'une suite (u_n) converge vers ℓ si, pour tout intervalle I ouvert contenant ℓ, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inclus dans I.

On formalise cette phrase de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant K, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Les intervalles sont donc vus comme les $]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$
On dit alors que (u_n) *converge vers* ℓ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
Si une suite ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

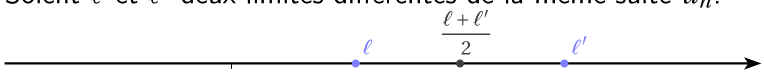
► Exercice 1 **Négation**
Écrire la définition formelle de la divergence d'une suite.

Théorème 1 (Unicité de la limite).

Si (u_n) admet une limite, alors cette limite est unique.

Démonstration

Raisonnement par l'absurde :
Soient ℓ et ℓ' deux limites différentes de la même suite u_n.



Considérons un intervalle $I = \left]\ell - 1 ; \frac{\ell+\ell'}{2}\right[$, il contient ℓ, donc il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in I$.
Par ailleurs, si $J = \left]\frac{\ell+\ell'}{2} ; \ell' + 1\right[$, alors il existe un autre rang N' à partir duquel tous les u_n seront dans J.
Si l'on choisit un n supérieur à la fois à N et N', u_n appartient à I et à J.
Or $I \cap J = \emptyset$, ce qui contredit la phrase précédente.

$\square$

Propriété 1 (passage à la limite dans les inégalités).

Si (u_n) est majorée par M (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < M$) et u_n convergente, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant M$.

■ **Exemple 1:**

$u_n = 1 - \frac{1}{n} < 1$, la suite (u_n) est majorée par 1, mais $\lim u_n = 1 \leqslant 1$.

Remarque 1.

Quand on passe à la limite, une inégalité stricte devient une inégalité large.

1.2 Limite infinie

Définition 2 (Suite ayant pour limite $+\infty$).

On dit que la suite (u_n) *tend vers* $+\infty$ si pour toute valeur réelle A il existe un rang à partir duquel $u_n \geqslant A$.
On dit que (u_n) *diverge vers plus l'infini*, et on note $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.

On formalise cette phrase de la façon suivante :

$$\forall A > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant K, u_n > A$$

C'est donc encore une histoire d'intervalles qui contiennent la limite qui contiennent tous les termes de la suite à partir d'un certain rang : $]A;+\infty[$

▶ Exercice 2 Limite vers $-\infty$

Écrire la définition formelle de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

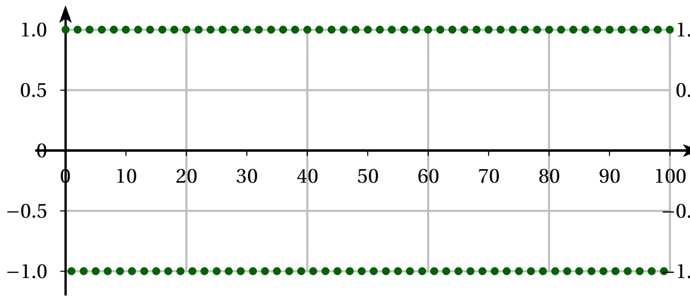
1.3 Suites sans limites

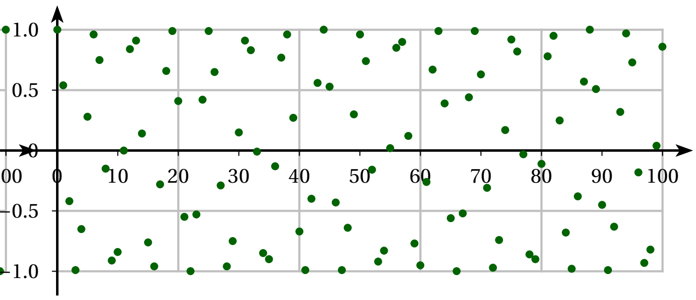
Quelques exemples illustrés de suites divergentes, sans limites

■ Exemple 2:

La suite $(-1)^n$ admet deux *valeurs d'accumulation* : $+1$ et -1, qui vont concentrer les valeurs de la suite.

La suite définie par $u_n = \cos n$ admet une infinité de valeurs d'accumulation entre -1 et $+1$.

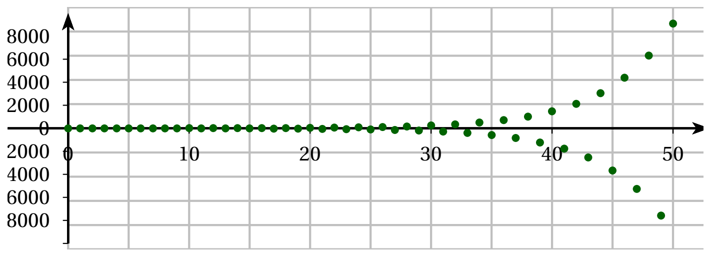




Remarque 2.

Les deux exemples précédents montrent qu'une suite bornée n'est pas forcément convergente.

Autre type de divergence : non bornée.
La suite $(-2)^n$ diverge.



2 Opérations sur les limites

Les théorèmes vus ici sont tous admis. Ce sont les mêmes résultats que pour les fonctions.

2.1 Somme

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim u_n + v_n$					F.I.

2.2 Produit

$\lim u_n$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim u_n \times v_n$				

2.3 Inverse

$\lim u_n$	ℓ	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim \frac{1}{u_n}$				

Remarque 3.

Pour les quotients, on utilise les deux derniers tableaux : produits et inverse.

▶ Exercice 3 **Déterminer une limite par opérations**

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - \frac{3}{n} + 2^n$

▶ Exercice 4 **⚠Lever une indétermination**

Calculer $\lim\limits_{n\infty} n^2 - 2n$, $\lim\limits_{n\infty} \frac{2n^2+4}{n^2+100n+3{,}5}$ et $\lim\limits_{n\infty} \frac{n}{n^3+1}$.

3 Limites et comparaisons

3.1 Bornitude

Théorème 2 (Convergence et bornitude).

Toute suite convergente est bornée.

<u>Démonstration</u>

Soit (u_n) une suite convergente vers un nombre ℓ. Il existe un rang p à partir duquel tous les termes de la suite sont compris dans l'intervalle $I = [\ell - 1 ; \ell + 1]$ (borné).

On peut voir que les premiers termes de la suite (jusqu'au rang p) sont compris dans l'intervalle $\left[\underbrace{\min_{0\leq k\leq p} u_k}_{\alpha} ; \underbrace{\max_{0\leq k\leq p} u_k}_{\beta}\right]$ (borné également).

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\min(\ell - 1, \alpha) \leqslant u_n \leqslant \max(\ell + 1, \beta)$

□

Remarque 4 (Réciproque fausse).

La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée mais n'admet pas de limite.

3.2 Théorème des gendarmes

Théorème 3.

Soient deux suites (u_n) et (v_n) convergeant respectivement vers ℓ et ℓ'.
Si à partir d'un certain rang p, $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$

Démonstration

Par l'absurde

□

Théorème 4 (dit « Des gendarmes » ou « d'encadrement »).

Si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ, et qu'une suite (v_n) est telle qu'à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$,
alors (v_n) converge vers ℓ.

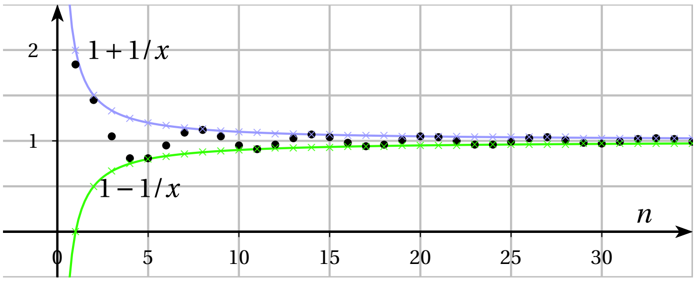
Démonstration

On peut faire entrer les termes de la suite (v_n) dans le même intervalle contenant ℓ choisi les deux autres suites (u_n) et (w_n) à partir d'un certain rang.

□

■ **Exemple 3:**

On va déterminer la limite de (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 + \dfrac{\sin n}{n}$.



3.3 Théorème dit « de comparaison »

Théorème 5 (De comparaison).

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang p. Alors

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Démonstration

Supposons que si $n \geqslant p$, alors $u_n \leqslant v_n$. Supposons également que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Soit A un nombre réel.
Il existe un rang q à partir duquel $u_n \geqslant A$.
Soit $r = max(p,q)$. Si $n \geqslant r$ alors $v_n \geqslant u_n \geqslant A$, donc $v_n \geqslant A$.
Cela prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

□

▶ Exercice 5

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{(n+1)^2+2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} -n+\sin(n)$

3.4 Suites géométriques

Propriété 2 (limite de q^n, $q>1$).

Si $q>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Démonstration

On rappelle l'inégalité de Bernoulli :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1+na$ On pose $q = 1+a$, $\boldsymbol{a>0}$.
Montrons maintenant que $\lim\limits_{n\infty} q^n = +\infty$.
comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+na = +\infty$ car $a>0$.
En appliquant la propriété sur les comparaisons de limites infinies à $q^n \geqslant 1+na$, , on peut conclure.

□

Conséquence 1 (Synthèse : limites de (q^n)).

- Si $q>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $q=1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
- Si $|q|<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q \leqslant -1$, alors $\left(q^n\right)$ n'a pas de limite.

▶ Exercice 6

Déterminer la limite de (u_n) dans les trois cas suivants :

- Si (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 1{,}02$.
- Si (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $q = 1{,}02$.
- Si (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $q = 0{,}98$.

4 Limites et monotonie

4.1 Théorème de convergence monotone

Théorème 6 (Suite croissante non majorée).

Si (u_n) est croissante et non majorée, alors elle admet une limite infinie.

Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante non majorée.
Soit $A \in \mathbb{R}$, comme (u_n) n'est pas majorée : $\exists p \in \mathbb{N},\ u_p \geqslant A$.
Croissante : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$.

Par conséquent, $\forall n \geqslant p,\ u_n \geqslant u_p \geqslant A$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

$\square$

Remarque 5 (Hypothèses !).

- Une suite non bornée n'admet pas forcément de limite infinie.
  Ex : La suite définie par $u_n = (-2)^n$ n'a pas de limite et n'est pas bornée.
- Une suite qui a pour limite $+\infty$ n'est pas forcément monotone.
  Ex : La suite définie par $u_n = n + 2 \times (-1)^n$

Théorème 7 (Convergence monotone (TCM) (admis)).

Si une suite est croissante et majorée, alors elle converge.

Remarque 6.

La version décroissante minorée existe également.

Remarque 7.

Le théorème **n'est pas constructif** : on sait que la suite est convergente mais on ne peut pas connaître directement la valeur de la limite.

Remarque 1
⚠Une suite bornée n'est pas forcément convergente !

▶ Exercice 7 Application du théorème

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ et en déduire que (u_n) est convergente.

Propriété 3.

Si une suite (u_n) est croissante et converge vers ℓ, alors elle est majorée par ℓ.

Remarque 8.

Une propriété similaire existe pour les suites décroissantes, formulez-la.

Théorème 8 (du point fixe).

Si une suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente vers ℓ et f continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de la fonction f. Autrement dit si une suite converge alors la limite de la suite est solution de l'équation $f(x) = x$.

Démonstration

Si (u_n) converge vers ℓ, alors (u_{n+1}) converge vers la même limite.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. En faisant tendre n vers $+\infty$ de chaque côté de l'égalité, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et comme f est continue en ℓ, par composition de limites, comme $\lim\limits_{X\to\ell} f(X) = f(\ell)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$, on a donc

$$\ell = f(\ell)$$

□

4.2 Suites adjacentes

Définition 3.

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Théorème 9 (des suites adjacentes).

Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.