Correction DS n°6 Serie Technologique

Exercice 1

1°) a) $\ln(6x-2)$ est défini si et seulement si $6x-2>0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$

1°) b) $\ln(2x-1)$ est défini si et seulement si $2x-1>0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

1°) c) $\ln(x)$ est défini si et seulement si $x>0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[$

2°) Equation $\ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln(x)$

$\forall x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$, $\Leftrightarrow \ln((6x-2)(2x-1)) = \ln(x)$

$\Leftrightarrow \ln(12x^2 - 10x + 2) = \ln(x)$

$\Leftrightarrow 12x^2 - 10x + 2 = x$

$\Leftrightarrow 12x - 11x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \Delta = 121 - 8 \times 12 = 25$ donc

$x_1 = \frac{11 - \sqrt{25}}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{11 + \sqrt{25}}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{3}\right\}}$

Exercice 2

1°) $x > 0$, $g(x) = x^2 + \ln(x)$

a) $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$

b) $\forall x > 0$, $2x^2 + 1 > 0$ et $x > 0$ donc $g'(x) > 0$

c) On en déduit le tableau de variations :

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	$-\infty$	0 ↗	$+\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

par opérations sur les limites

e) sur $]0; +\infty[$

- g est continue car dérivable
- g est strictement croissante
- $0 \in \left]\lim\limits_{x\to 0} g(x) ; \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)\right[$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; +\infty[$

En utilisant la calculatrice, on trouve $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$

f) On en déduit le signe de g :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2°) Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 + (\ln(x))^2$

2a) $f'(x) = 2x + 2\frac{\ln(x)}{x} = \frac{2x^2 + 2\ln(x)}{x} = \frac{2g(x)}{x}$

2°) b)

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

2c) f admet donc un minimum en α.

NB : $g(\alpha) = 0 \iff \ln(\alpha) = -\alpha^2$
donc $f(\alpha) = \alpha^2 + (\ln \alpha)^2$
$f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha^4 \simeq 0{,}6.$

Exercice 3

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \qquad u_0 = 1.$

1°) $u_1 = \frac{1}{2} \times u_0 + 1 = \frac{1}{2} \times 1 + 1 = \frac{3}{2} = 1{,}5$

2°) $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4} = 1{,}75$

$u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 1 = \frac{7}{8} + 1 = \frac{15}{8} = 1{,}875$

On a donc $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$.

3°) a) On pose P_n : « $u_n \leq 2$ ».

Initialisation : $u_0 = 1$ donc $u_0 \leq 2$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie

donc $u_n \leq 2$

donc $\frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2} \times 2 = 1$

donc $\frac{1}{2}u_n + 1 \leq 1 + 1 = 2$

donc $u_{n+1} \leq 2$ donc P_{n+1} est vraie

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 2$

3.b) (u_n) est majorée par 2.

4°) On pose P_n : « $u_n \leq u_{n+1}$ »

Initialisation : $u_1 = \frac{3}{2}$ donc $u_0 \leq u_1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie.

On a alors $u_n \leq u_{n+1}$

donc $\frac{1}{2} u_n \leq \frac{1}{2} u_{n+1}$

donc $\frac{1}{2} u_n + 1 \leq \frac{1}{2} u_{n+1} + 1$

donc $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ donc P_{n+1} est vraie

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq u_{n+1}$

4°) b) on en déduit que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 4

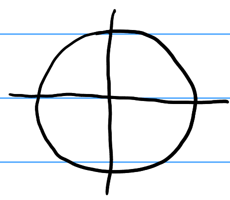
$f(x) = 4 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

1°) $f(-x) = 4 \sin\left(-\frac{x}{2}\right) = -4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) = -f(x)$ donc f est impaire

2°) $f(x+4\pi) = 4 \sin\left(\frac{x+4\pi}{2}\right) = 4 \sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) = 4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$

donc f est 4π-périodique

3°) $f'(x) = 4 \times \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$



$0 \leq \frac{x}{2} \leq \pi$

x	0		π		2π
$\cos\left(\frac{x}{2}\right)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

← Mon barème.