▶ Exercice 1

1. **Domaine de définition :**

   - $6x-2>0 \iff x>\dfrac{1}{3}$
   - $2x-1>0 \iff x>\dfrac{1}{2}$
   - $x>0$

   Ainsi l'équation est définie si $x>\dfrac{1}{2} \iff \mathscr{D}=\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

2. **Résolution :** Pour tout $x>\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \ln(6x-2)+\ln(2x-1) &= \ln x \\ \iff \ln\big((6x-2)(2x-1)\big) &= \ln x \\ \iff 12x^2-10x+2 &= x \\ \iff 12x^2-11x+2 &= 0 \end{aligned}$$

   $\Delta=121-96=25$. Ainsi l'équation du second degré a deux solutions : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{11-5}{24} = \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{11+5}{24} = \dfrac{2}{3} > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

   La solution de l'équation est donc $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{2}{3}\right\}}$.

▶ Exercice 2

Partie I **Étude d'une fonction auxiliaire**

$$g(x)=x+2-x\ln x$$

1. - Limite en 0 :
     $\lim\limits_{x\to 0} x+2=2$ et d'après le théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=2$.
   - Limite en $+\infty$:
     À priori une forme indéterminée du type $\infty-\infty$. Mais pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, $g(x)=x\ln x\big(\dfrac{1}{\ln x}+\dfrac{2}{x\ln x}-1\big)$, or $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}+\dfrac{2}{x\ln x}-1=-1$, donc par produit, d'après la règle des signes, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

2. g est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. $g'(x)=1-\left(\ln x+x\times\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x$ et $-\ln(x)>0 \iff x<1$. On a donc le tableau de signes et variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

3. Sur l'intervalle $]1;+\infty[$,
   - g est continue car dérivable
   - g est strictement décroissante
   - $0 \in \left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x);3\right[$

   D'après le théorème de la bijection, il existe un unique $\alpha \in]1;+\infty[$ solution de l'équation $g(x)=0$. De plus, pour tout $x \in]0;1]$, $g(x) > 2$.
   Ainsi, il existe une unique solution α sur $]0;+\infty[$ à l'équation $g(x)=0$.
   Par balayage à la calculatrice, on obtient l'encadrement $4{,}31 < \alpha < 4{,}32$

4. En exploitant le tableau de variations, on peut en déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie II **Étude d'une fonction f** Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+2}$.

1. f est bien dérivable sur $]0;+\infty[$ par quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.
   $f'(x) = \dfrac{(x+2)\times\frac{1}{x} - 1\times\ln x}{(x+2)^2} = \dfrac{x+2-x\ln x}{x(x+2)^2}$.
2. $g(\alpha)=0 \iff \alpha\ln\alpha = \alpha+2 \iff \dfrac{\ln\alpha}{\alpha+2} = \dfrac{1}{\alpha} \iff f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$
3. - Limite en 0 :
     $\lim\limits_{x\to0} x+2 = 2$ et $\lim\limits_{x\to0}\ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$.
   - Limite en $+\infty$:
     Forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$. Mais pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}\dfrac{1}{\frac{2}{x}+1}$. D'après le théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
4. Comme $x(x+2)^2 > 0$ sur $]0;+\infty[$, on a :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\alpha}$	$\searrow$	0

Avec $\dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{4}$.

▶ Exercice 3

Soit f la fonction $f(x) = 5 - \dfrac{4}{x+2}$.

1. $f'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2} > 0$, donc f est bien croissante sur $]0;+\infty[$.

2. $x>0$ donc $x \neq -2$ $f(x)=x \iff 5-x=\dfrac{4}{x+2} \iff (5-x)(x+2)=4 \iff -x^2+3x+6=0 \iff x^2-3x-6=0$.

   $\Delta = 9+24=33$ donc l'équation a deux solutions : $\begin{cases} x_1 &= \dfrac{3-\sqrt{33}}{2}<0 \\ x_2 &= \dfrac{3+\sqrt{33}}{2}=\alpha>0 \end{cases}$.

   Or $5 \leqslant \sqrt{33} \leqslant 6$ donc $\underline{4<\alpha<5}$.

3. Soit (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.
   On pose $\mathscr{P}_n$: « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ ».

   - **Initialisation :**
     $u_1 = 5-\dfrac{4}{3}=\dfrac{11}{3}>1$, et $u_1<\alpha$, donc on a bien $\underline{0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha}$ et donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :**
     Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Autrement dit,

     $$\begin{aligned} &0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha \\ &\text{Donc } f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha) \\ &\text{Donc } 3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2}) \leqslant \alpha \\ &\text{Donc } 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2}) \leqslant \alpha \end{aligned}$$

     Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   - **Conclusion :**
     La propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$:

     $$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

     Ainsi, <u>la suite (u_n) est croissante et bornée</u>

▶ Exercice 4

Soient f et g deux fonctions définies sur $[0;2\pi]$ par $f(x)=2x\cos(2x)$ et $g(x)=\sin(2x)$.

1. f et g sont dérivables sur $[0;2\pi]$, $f'(x)=2x\times 2\big(-\sin(2x)\big)+2\cos(2x)=2\cos(2x)-4x\sin(2x)$ et $g'(x)=2\cos(2x)$.
2. - Tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 : $y=f'(0)(x-0)+f(0)=2x$
   - Tangente à $\mathscr{C}_g$ en 0 : $y=g'(0)(x-0)+g(0)=2x$

   Donc les tangentes en 0 sont confondues.
3. On cherche les $a\in[0;2\pi]$ pour lesquels les tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont parallèles, soit les a tels que $f'(a)=g'(a) \iff 2\cos(2a)-4a\sin(2a)=2\cos 2a \iff 4a\sin(2a)=0 \iff a=0$ ou $\sin(2a)=0 \iff 2a\equiv 0+k\times 2\pi$ ou $2a=\pi+k\times 2\pi \iff a\in\left\{0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2},2\pi\right\}$