Feuille de TD n°7
Nombres complexes

1 Ensemble des nombres complexes

Savoir déterminer partie réelle et imaginaire d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

2 Opérations sur les nombres complexes

2.1 Addition, multiplication

$\boxed{1}$ Écrire les nombres suivants sous forme algébrique :

a. $2(1-3\mathrm{i})-(1-\mathrm{i})$

b. $-4\mathrm{i}^2+\mathrm{i}$

c. $\mathrm{i}(-2+7\mathrm{i})$

d. $\dfrac{1}{\mathrm{i}}$

e. i^3

f. i^4

g. i^5

h. i^6

i. $(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$

j. $(1+\mathrm{i})^2$

k. $(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{3})(\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{3})$

l. $(2+3\mathrm{i})^2$

$\boxed{2}$ Même consigne

a. $\mathrm{i}-(2-5\mathrm{i})$

b. $3(1+2\mathrm{i})-(4+\mathrm{i})$

c. $2\mathrm{i}^2+\mathrm{i}+2(1-2\mathrm{i})$

d. $\mathrm{i}^3-\mathrm{i}$

e. $(4-5\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$

f. $(1+3\mathrm{i})(5-\mathrm{i})-2(5+3\mathrm{i})$

g. $(1-2\mathrm{i})^2$

h. $(\mathrm{i}+2)(\mathrm{i}-2)$

i. $(1-3\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})$

j. $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$

k. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

l. $(3-2\mathrm{i})^2-(2+3\mathrm{i})^2$

$\boxed{3}$ Démontrer que $1+2\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2+\ldots+n\mathrm{i}^{n-1}=\dfrac{-(n+1)\mathrm{i}^{n+1}-n\mathrm{i}^n+\mathrm{i}}{2}$
En déduire la valeur de $1-3+5-7+\ldots+(-1)^k(2k+1)$ et de $2-4+6-\ldots+(-1)^{k-1}2k$

2.2 Conjugué

$\boxed{4}$ Démontrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$,

- $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$
- $z-\overline{z}=2i\mathrm{Im}(z)$

$\boxed{5}$ Démontrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$,

- $z\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow z=\overline{z}$
- $z\in i\mathbb{R}\Longleftrightarrow z=-\overline{z}$

$\boxed{6}$ Conjugué et opérations.
Soit $z\in\mathbb{C}$ un nombre complexe, différent de i. Écrire le conjugué des nombres suivants :

1. $z^2-\mathrm{i}z+3\mathrm{i}-4$

2. $\overline{z}+(2+\mathrm{i})z$

3. $\dfrac{z-2}{z-\mathrm{i}}$

$\boxed{7}$ Démontrer, sans calcul, que le nombre $Z=\dfrac{2-7\mathrm{i}}{-3+5\mathrm{i}}-\dfrac{2+7\mathrm{i}}{3+5\mathrm{i}}$ est un nombre réel.

$\boxed{8}$ *Petit problème*
On considère l'équation (E) $z^4=-4$, où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E), alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de (E).

2. On considère le nombre $z_0 = 1 + i$.
   Montrer que z_0 est solution de (E).
3. Déduire des questions précédentes les trois autres solutions de l'équation (E).

$\boxed{9}$ On note $\text{cj} = -\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Calculer cj^2 et j^3, puis $1 + \text{j} + \text{j}^2$

2.3 Inverse et Division

$\boxed{10}$ On donne les nombres complexes $z_1 = 1 - 4\text{i}$ et $z_2 = 1 + \text{i}$
Calculer $z_1 z_2$, z_1^2, z_2^3, $\frac{z_2}{z_1}$ et $\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}$.

$\boxed{11}$ Équations du premier degré
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $\text{i}z - 1 = 7\text{i}$
2. $z = 3 + \text{i}z$
3. $5\text{i} - z = 3\text{i}z + 1$
4. $2\text{i} + 3z = (1 + \text{i})z + 1$
5. $(1 + \text{i})\overline{z} = 1 - 3\overline{z}$
6. $\overline{z} + \text{i}z = 1$
7. $z - 1 = 2\text{i} + 3\overline{z}$
8. $2\text{i}z - 1 = \overline{z} + 4\text{i}$

3 Résolution des équations de degré 2

$\boxed{12}$ **Équations du second degré (bases)**
Résoudre dans $\mathbb{C}$.

1. $z^2 + 1 = 0$
2. $2z^2 - z + 1 = 0$
3. $z^2 + 3z - 10 = 0$
4. $z^2 + 6z + 15 = 0$
5. $-z^2 + 8z - 25 = 0$
6. $3z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$

$\boxed{13}$ **Factorisation et résolution d'équation**
On considère le polynôme $P(z) = z^3 + (-6 + \text{i})z^2 + (13 - 6\text{i})z + 13\text{i}$

1. Montrer que $-\text{i}$ est une racine de P.
2. Déterminer trois nombres complexes a, b et c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z + \text{i})(az^2 + bz + c)$
3. En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

$\boxed{14}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(2z - 3\text{i} + 5)(2z^2 - 2z + 1) = 0$
2. $(-2z + 1)(z - 1) = 1$
3. $3z^3 - 2z^2 + z = 0$
4. $z^4 + 2z^2 - 8 = 0$ *Méthode ?*

$\boxed{15}$ On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = 2z^3 - 2z^2 + z - 10$.

1. Déterminer une solution évidente réelle x_0 à l'équation $P(z) = 0$.
2. Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que :

$$P(z) = (z - x_0)(az^2 + bz + c)$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

$\boxed{16}$ On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - 2z^3 + 12z^2 - 8z + 32$.

1. Montrer que 2i est une racine de P.

2. Justifier que $-2\mathrm{i}$ est également une racine de P.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que $P(z) = (z^2+4)(az^2+bz+c)$. *On pourra procéder par identification ou bien par division des polynômes.*
4. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

$\boxed{17}$ **Coefficients complexes – (SG)**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 5(1+\mathrm{i})z - 12 + 9\mathrm{i} = 0$

$\boxed{18}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(x^2-2x-11\right)^2 + 4(2x+1)^2 = 0$

$\boxed{19}$ Résoudre dans $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ l'équation $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$

4 Représentation géométrique des nombres complexes

4.1 Affixe d'un point du plan

$\boxed{20}$ **Théorème de Varignon**
On considère quatre points dans le plan complexe : $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ et L, M, N et P, les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. Déterminer les affixes ℓ, m, n et p des points L, M, N et P en fonction de a, b, c et d.
2. Démontrer que le quadrilatère $LMNP$ est un parallélogramme.

4.2 Affixe d'un vecteur

$\boxed{21}$ Dans le plan complexe, on considère les points $A(-4+\mathrm{i})$, $B(3\mathrm{i})$, $C(5+\mathrm{i})$ et $D(-1-2\mathrm{i})$.

1. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

$\boxed{22}$ Dans le plan complexe, on considère les points $A(1-\mathrm{i})$, $B(3+0,5\mathrm{i})$ et $C(8,5+4,5\mathrm{i})$.
Les points sont-ils alignés ?

$\boxed{23}$ **Lieu de points**
Dans le plan complexe, à tout point M d'affixe z, on associe un point M' d'affixe z' tel que $z' = z^2 + 2\mathrm{i}z$.
On appelle (E) l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' est un nombre réel.

1. Vérifier que les points $A(2-\mathrm{i})$ et $B(-3\mathrm{i})$ appartiennent à (E).
2. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, où x, y, x' et y' sont des réels.
   Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
3. En déduire une caractérisation de l'ensemble (E).

4.3 Module d'un nombre complexe

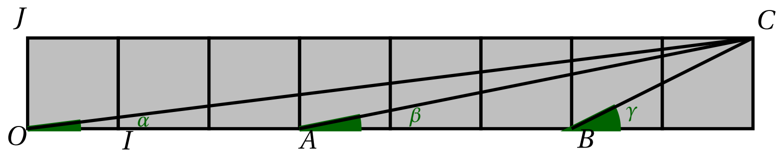
$\boxed{24}$ Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant les égalités proposées.

1. $|z| = 3$
2. $\mathrm{Re}(z) = -2$
3. $\mathrm{Im}(z) = 1$

5 Écriture trigonométrique d'un nombre complexe

$\boxed{25}$ Pour a et b dans $\mathbb{C}$ avec $|a|<1$ et $|b|<1$, démontrer que $\left|\dfrac{|a-b|}{1-\overline{a}b}\right|<1$

$\boxed{26}$ Prouver que la relation de John Dahse : $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$



$\boxed{27}$ Écriture algébrique puis exponentielle de $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

$\boxed{28}$ Donner la forme algébrique de $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}\right)^{30}$.

$\boxed{29}$

1. Donner l'écriture algébrique de $\dfrac{2-\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$
2. Écrire sous forme exponentielle $\dfrac{3}{1-\mathrm{i}}$
3. Linéariser l'expression $\cos^3(x)$

6 Forme exponentielle

$\boxed{30}$ Module et argument de $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, selon $\theta\in[-\pi;\pi]$.

On pourra factoriser par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$

$\boxed{31}$ Module et argument de $\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$.

$\boxed{32}$ Simplifier l'expression : $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx$ pour $x\in\mathbb{R}$ et $x\not\equiv 0[2\pi]$

7 Applications à la géométrie

$\boxed{33}$ Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts dans le plan complexe. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i. ABC est équilatéral.

ii. j et j^2 sont solutions de $az^2+bz+c=0$

iii. $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

$\boxed{34}$ Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe du plan. Sur ses 4 côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ on construit 4 carrés de centres respectifs P, Q, R et S. Démontrer que les milieux K, L, M et N des segments $[PQ]$, $[QR]$, $[RS]$, et $[SP]$ forment un carré.

$\boxed{35}$ Soit ε une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Calculer $A=1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+\cdots+n\varepsilon^{n-1}$

Feuille de TD n°7
Réponses ou Solutions

1 Ensemble des nombres complexes

Savoir déterminer partie réelle et imaginaire d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

2 Opérations sur les nombres complexes

2.1 Addition, multiplication

$\boxed{1}$

a. $1-5\mathrm{i}$
b. $4+\mathrm{i}$
c. $-7-2\mathrm{i}$
d. $-\mathrm{i}$
e. $-\mathrm{i}$
f. 1
g. i
h. -1
i. 2
j. $2\mathrm{i}$
k. 5
l. $-5+12\mathrm{i}$

$\boxed{2}$

a. $-2+6\mathrm{i}$
b. $-1+5\mathrm{i}$
c. $-3\mathrm{i}$
d. $-2\mathrm{i}$
e. $9-\mathrm{i}$
f. $-2+8\mathrm{i}$
g. $-3-4\mathrm{i}$
h. -5
i. 10
j. $-3+\mathrm{i}$
k. $-\mathrm{i}$
l. $10-24\mathrm{i}$

2.2 Conjugué

$\boxed{4}$ Soit $z=a+\mathrm{i}b$ son écriture algébrique.

- $z+\overline{z}=a+\mathrm{i}b+a-\mathrm{i}b=2a=2\mathrm{Re}(z)$
- $z-\overline{z}=a+\mathrm{i}b-(a-\mathrm{i}b)=2\mathrm{i}b=2i\mathrm{Im}(z)$

$\boxed{5}$ Soit $z=a+\mathrm{i}b$ son écriture algébrique

- $z=\overline{z} \iff a+\mathrm{i}b=a-\mathrm{i}b \iff b=-b \iff b=0 \iff z\in\mathbb{R}$
- $z=-\overline{z} \iff a+\mathrm{i}b=-a+\mathrm{i}b \iff a=-a \iff a=0 \iff z=\mathrm{i}b \iff z\in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

$\boxed{6}$

1. $\overline{z}^2+\mathrm{i}\overline{z}-3\mathrm{i}-4$

2. $z+(2-\mathrm{i})\overline{z}$

3. $\dfrac{\overline{z}-2}{\overline{z}+\mathrm{i}}$

$\boxed{7}$ Somme d'un nombre et de son conjugué.

$\boxed{8}$

1. Soit z une solution de l'équation (E).
   - $(-z)^4=z^4=-4$
     Donc $-z$ est aussi solution de (E).
   - $\overline{z}^4=\overline{z^4}=\overline{-4}=-4$
     Donc $\overline{z}$ est aussi solution de (E).
2. $(1+\mathrm{i})^2=1+2\mathrm{i}-1=2\mathrm{i}$, donc $(1+\mathrm{i})^4=(2\mathrm{i})^2=-4$
   Donc $z_0=1+\mathrm{i}$ est solution de (E).

3. D'après les questions précédentes, $-z_0 = -1-\mathrm{i}$ est solution de (E), $\overline{z_0} = 1-\mathrm{i}$ et $\overline{-z_0} = -1+\mathrm{i}$.

$\boxed{9}$ $\mathrm{j}^2 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{\mathrm{j}}$, $\mathrm{j}^3 = 1$, $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$

2.3 Inverse et Division

$\boxed{10}$ Vérifier à la calculatrice.

$\boxed{11}$

1. $7-\mathrm{i}$

2. $\frac{3}{2}(1+\mathrm{i})$

3. $1,4+0,8\mathrm{i}$

4. $\frac{4-3\mathrm{i}}{5}$

5. $\frac{4+\mathrm{i}}{17}$

6. pas de solution dans $\mathbb{C}$.

7. $\frac{-1+\mathrm{i}}{2}$

8. $3-2\mathrm{i}$

3 Résolution des équations de degré 2

$\boxed{12}$

1. $\pm\mathrm{i}$

2. $\frac{1\pm\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}$

3. -5 et 2

4. $-3\pm\mathrm{i}\sqrt{6}$

5. $4\pm3\mathrm{i}$

6. $\frac{-\sqrt{3}\pm3\mathrm{i}}{6}$

$\boxed{13}$

1. $P(-\mathrm{i}) = 0$.
2. $a = 1$, $b = -6$ et $c = 13$ par identification.
3. Les trois solutions sont $-\mathrm{i}$, $3\pm2\mathrm{i}$.

$\boxed{14}$

1. $\frac{1}{2}(-5+3\mathrm{i})$, $\frac{1\pm\mathrm{i}}{2}$
2. $\frac{3\pm\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}$
3. 0 et $\frac{2\pm3\mathrm{i}}{6}$
4. $\pm2\mathrm{i}$ et $\pm\sqrt{2}$.

$\boxed{15}$

1. $x_0 = 2$
2. $a = 2$, $b = 2$, $c = 5$.
3. Les solutions sont 2, $\frac{-1\pm3\mathrm{i}}{2}$.

$\boxed{16}$

1. $P(2\mathrm{i}) = 0$.
2. Comme les coefficients de P sont réels, les racines complexes de P sont conjuguées.

$$z_0 \text{ est une racine de } P \iff P(z_0) = 0 \iff \overline{P(z_0)} = \overline{0} \iff \overline{z_0^4 - 2z_0^3 + 12z_0^2 - 8z + 32} = 0$$

D'après les propriétés des opérations avec les conjugués,

$$\iff \overline{z_0}^4 - 2\overline{z_0}^3 + 12\overline{z_0}^2 - 8\overline{z_0} + 32 = 0 \iff P(\overline{z_0}) = 0$$

$\iff \overline{z_0}$ est une racine de P.

3. $a = 1$, $b = -2$ et $c = 8$.
4. Les solutions sont $\pm 2\mathrm{i}$ et $1 \pm \mathrm{i}\sqrt{7}$.

$\boxed{17}$ $\Delta = 50\mathrm{i} - 4(-12+9\mathrm{i}) = 48 + 14\mathrm{i}$
$\delta = \alpha + \mathrm{i}\beta$ racine carrée de Δ, donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha^2 - \beta^2 &=& 48 \\ 2\alpha\beta &=& 14 \\ \alpha^2 + \beta^2 &=& \sqrt{48^2 + 14^2} = 50 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha^2 &=& 98 \\ 2\beta^2 &=& 2 \\ \alpha\beta &=& 7 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& \pm 7 \\ \beta &=& \pm 1 \\ \alpha\beta &=& 7 \end{array}\right.$$

On choisit donc une des deux possibilités. Par exemple $\delta = 7 + \mathrm{i}$
On en déduit les deux solutions de l'équation :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1 &=& \dfrac{5+5\mathrm{i}-7-\mathrm{i}}{2} = \dfrac{-2+4\mathrm{i}}{2} = -1+2\mathrm{i} \\ z_2 &=& \dfrac{5+5\mathrm{i}+7+\mathrm{i}}{2} = 6+3\mathrm{i} \end{array}\right.$$

On a bien $z_1 + z_2 = 5 + 5\mathrm{i}$, on est content ☺.

$\boxed{18}$ Écriture sous la forme
(E): $\left(x^2 - 2x - 11\right)^2 - 4\mathrm{i}^2(2x+1)^2 = 0 \iff \left(x^2 - 2(1+2\mathrm{i})x - 11 - 2\mathrm{i}\right)\left(x^2 - 2(1-2\mathrm{i})x - 11 + 2\mathrm{i}\right) = 0$
Les solutions sont $x_1 = -2 + \mathrm{i}$, $x_2 = 4 + 3\mathrm{i}$, $x_3 = -2 - \mathrm{i}$ et $x_4 = 4 - 3\mathrm{i}$

4 Représentation géométrique des nombres complexes

4.1 Affixe d'un point du plan

$\boxed{20}$

1. $\ell = \dfrac{a+b}{2}$, $m = \dfrac{b+c}{2}$, $n = \dfrac{c+d}{2}$ et $p = \dfrac{a+d}{2}$
2. On calcule le milieu $H(h)$ de $[LN]$ et de $K(k)$ de $[MP]$:

$$h = \frac{\ell + n}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}$$
$$k = \frac{m+p}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}$$

$k = h$, donc le quadrilatère $LMNP$ a ses diagonales qui ont même milieu et donc c'est un parallélogramme.

On aurait pu aussi calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{PN}$.

4.2 Affixe d'un vecteur

$\boxed{21}$

1. $\overrightarrow{AB}(4+2\mathrm{i})$ et $\overrightarrow{CD}(-6-3\mathrm{i})$
2. $\dfrac{4+2\mathrm{i}}{-6-3\mathrm{i}} = -\dfrac{2}{3}$. Les vecteurs sont colinéaires et donc les droites sont parallèles.

$\boxed{22}$ le quotient des affixes des vecteurs n'est pas réel, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points ne sont pas alignés.

$\boxed{23}$ $x' = x^2 - y^2 - 2y$ et $y' = 2xy + 2x$
$z' \in \mathbb{R} \iff y' = 0 \iff 2x(y+1) = 0 \iff x = 0$ ou $y = -1$
(E) est donc la réunion de deux droites, l'une horizontale, l'autre verticale.

4.3 Module d'un nombre complexe

$\boxed{\textbf{24}}$ cercle de centre O de rayon 3, droite verticale $x = -2$, droite horizontale $y = 1$.

5 Écriture trigonométrique d'un nombre complexe

6 Forme exponentielle

7 Applications à la géométrie