Chapitre 8 : Nombres Complexes (I)

Table des matières

1 Ensemble des nombres complexes

Définition 1 (Nombres complexes).

On appelle ensemble des nombres complexes l'ensemble noté $\mathbb{C}$ des nombres z s'écrivant sous la forme $a+ib$ où a et b sont des réels et i est le nombre dit *imaginaire* vérifiant $i^2=-1$.

Remarque 1.

Il est clair que $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$: en effet, si $b=0$, alors $z=a+i\times 0\in\mathbb{R}$.

Définition 2 (Forme algébrique).

Un nombre complexe admet plusieurs écritures, la forme $z=a+ib$ s'appelle sa *forme algébrique*, cette écriture est unique.
Si $z=a+ib$, a est appelé *partie réelle* de z et se note $a=\mathrm{Re}(z)$.
b est appelé *partie imaginaire* de z et se note $b=\mathrm{Im}(z)$.
⚠$\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ sont des nombres **réels** !

Démonstration

⚠**Par l'absurde**

□

Définition 3 (Imaginaire pur).

Un nombre complexe $z=a+ib$ tel que $a=0$ est appelé *imaginaire pur*, on note alors $z\in i\mathbb{R}$.

■ **Exemple 1:**
Parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$$2+\mathrm{i},\ \sqrt{5},\ -2\mathrm{i}, 4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right),\ \frac{1-4\mathrm{i}}{2}$$

2 Opérations sur les nombres complexes

2.1 Addition, multiplication

Les opérations d'addition et multiplication sur $\mathbb{C}$ sont semblables à celles de $\mathbb{R}$, en tenant compte du fait que $\boxed{i^2=-1}$.

▶ **Exercice 1**
Voir exos 1 et 2 du TD.

2.2 Conjugué

Avant de définir l'inverse et l'opération de division, on va introduire une nouvelle opération, propre aux nombres complexes, l'opération de **conjugaison**.

Définition 4 (Conjugué).

Si $z = a + ib$, on appelle *nombre complexe conjugué* le complexe noté $\overline{z} = a - ib$.

▶ Exercice 2 **Conjugué**

Donner les conjugués des nombres complexes suivants : $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = 3i + 1$ et $z_3 = i$.

Propriété 1 (Compatibilité de la conjugaison avec opérations).

Pour tous $z,\ z' \in \mathbb{C}$,

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ conjugué de la somme = somme des conjugués
- $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ conjugué du produit = produit des conjugués
- $\overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ conjugué de l'inverse = inverse du conjugué
- $\overline{\dfrac{z}{z'}} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ conjugué du quotient = quotient des conjugués

⋆ Pour tout entier naturel n, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

<u>Démonstration</u>

Dans toute la démonstration, on posera $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes en écriture algébrique.

- Somme :

$$\overline{z+z'} = \overline{a+a'+i(b+b')} = a + a' - i(b+b') = \underbrace{a-ib}_{\overline{z}} + \underbrace{a'-ib'}_{\overline{z'}}$$

- Produit :
  - $\overline{zz'} = \overline{aa' - bb' + i(ab' + a'b} = aa' - bb' - i(ab' + a'b)$
  - $\overline{z} \times \overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = aa' - ibb' - i(ab' + a'b)$

  Donc on a bien $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
- Inverse :
  - $\overline{\dfrac{1}{z}} = \overline{\dfrac{1}{a+ib}} = \overline{\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}} = \dfrac{a+ib}{a^2+b^2}$
  - $\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{a-ib} = \dfrac{a+ib}{a^2+b^2}$

  Donc on a bien $\overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.
- Quotient :
  En appliquant les deux points précédents, on a :

$$\overline{\frac{z}{z'}} = \overline{z \times \frac{1}{z'}} = \overline{z} \times \overline{\frac{1}{z'}} = \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

★ Démontrons cette propriété par récurrence : Posons $\mathscr{P}_n$: $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

- Initialisation :
  $\overline{z^0} = \overline{1} = 1$ et $\overline{z}^0 = 1$, ainsi la propriété $\mathscr{P}_0$ est vérifiée.
- Hérédité :
  Supposons la propriété vraie au rang n : i.e. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
  alors $\overline{z^{n+1}} = \overline{z \times z^n} = \overline{z} \times \overline{z^n}$ par produit
  Ainsi, $\overline{z^{n+1}} = \overline{z} \times \overline{z}^n = \overline{z}^{n+1}$ et donc la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion :
  La propriété $\mathscr{P}_n$ est donc vraie au rang 0, et héréditaire, on peut donc conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

□

Remarque 2 ($z\overline{z}$).

On remarque que $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$ (*le produit d'un nombre et de son conjugué est positif*) en effet, $(a + ib) \times (a - ib) = a^2 + b^2 \geqslant 0$

Propriété 2 (identités avec le conjugué).

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$

Démonstration

En exercice (exercice 3 du TD)

□

Propriété 3 (réel ou pas).

- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$

Démonstration

En exercice (Exercice 4 du TD)

□

2.3 Inverse et Division

Propriété 4 (Inverse).

Tout nombre complexe non nul $z = a + ib$ admet un inverse noté $\frac{1}{z} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$.

▶ Exercice 3

Calculer la forme algébrique des nombres suivants :

- $a = \frac{1}{2-\mathrm{i}}$
- $b = \frac{1}{\mathrm{i}}$
- $c = \frac{1}{2\mathrm{i}-5}$
- $d = \frac{1}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$

Remarque 3.

Diviser revient à multiplier par l'inverse (comme avant)

▶ Exercice 4 **Inverser, diviser**

Donner la forme algébrique des nombres suivants : $\frac{1}{1+2i}$ et $\frac{2-3i}{1+2i}$.

Application : résolution des équations de degré 1

3 Équations de degré 2 à coefficients réels

L'ensemble des nombres complexes est dit algébriquement clos : tous les polynômes y admettent une écriture complètement factorisée (autrement dit, ils ont tous une racine dans $\mathbb{C}$)

Théorème 1 (Équations de degré 2).

Toute équation de la forme $ax^2+bx+c=0$, où a, b et c sont des nombres réels, admet deux racines complexes **conjuguées** (éventuellement confondues si $\Delta=0$) : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}(=\overline{x_1})$.
Ainsi, tout polynôme de la forme ax^2+bx+c admet une écriture sous la forme $a(x-x_1)(x-\overline{x_1})$ (factorisée).

▶ Exercice 5 Équations à résoudre

Donner la forme algébrique des solutions des équations suivantes :

$$x^2-x-1=0 \qquad x^2+x+1=0 \qquad x^2=-5 \qquad x^2+3x+2=0$$

En déduire la forme factorisée des polynômes suivants :

$$x^2-x-1 \qquad x^2+x+1 \qquad x^2+5 \qquad x^2+3x+2$$

4 (SG) Équations de degré 2 à coefficients complexes

■ Exemple 2:

Résoudre $z^2+(3-4\mathrm{i})z-1+5\mathrm{i}=0$

1. Calcul de Δ. $\Delta\in\mathbb{C}$, il admet deux racines carrées opposées. On appelle δ l'une des deux.
2. Comme $\delta^2=\Delta$ **(*)**, si on pose $\delta=\alpha+\mathrm{i}\beta$, en regardant la partie réelle, la partie imaginaire et le module dans **(*)**, on trouve trois égalités de la forme :

$$\begin{cases} \alpha^2-\beta^2 = \ldots \\ 2\alpha\beta = \ldots \\ \alpha^2+\beta^2 = \ldots \end{cases}$$

3. On détermine α et β au signe près.
4. On retrouve les solutions de l'équation par les formules habituelles.

5 Représentation géométrique des nombres complexes

5.1 Affixe d'un point du plan

Définition 5 (Interprétation géométrique).

Dans le plan, muni d'un repère orthonormé, on peut associer chaque point $M(x;y)$ au nombre complexe $z = x+iy$. Si on dit que le couple $(x;y)$ constitue les coordonnées de M, on dit que le nombre z est *l'affixe* du point M, on note $M(z)$ et que M est le *point image* de z.

Remarque 4.

Les vecteurs de base du plan, lors d'une identification avec $\mathbb{C}$ sont notés $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (notamment pour éviter la confusion avec la notation i de $\sqrt{-1}$). On parle donc de *plan complexe* muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Propriété 5 (milieu d'un segment).

Si $M(z)$ et $M'(z')$, alors le milieu I de $[MM']$ a pour affixe $I\left(\dfrac{z+z'}{2}\right)$.

▶ Exercice 6

Soit M d'affixe $z \in \mathbb{C}$. Quelle est la position de M' d'affixe $\overline{z}$, le conjugué de z ?

5.2 Affixe d'un vecteur

Définition 6 (Du point au vecteur).

À tout nombre complexe $z = x+iy$ (x et y réels), on associe le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le plan complexe. Comme pour les points, $\vec{w}$ est appelé *vecteur image* de z et z est l'*affixe* de $\vec{w}$. On note $\vec{w}(z)$.

Propriété 6 (calcul des coordonnées d'un vecteur).

- Si $A(a)$ et $B(b)$, alors $\overrightarrow{AB}(b-a)$.
- La relation est linéaire : Si $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ ont pour affixes respectives z et z' alors $\vec{w}+\vec{w}'(z+z')$ et $\lambda\vec{w}(\lambda z)$.

On pourra donc interpréter géométriquement toutes les opérations sur les nombres complexes (additions, soustraction, conjugaison pour le moment).

▶ Exercice 7 Recherche de lieux de points

Déterminer l'ensemble des points du plan M d'affixe z tels que $\dfrac{iz-3}{z-3i}$ est un réel.

Même question avec $\dfrac{iz-3}{z-3i}$ est un imaginaire pur.

5.3 Module d'un nombre complexe

On rappelle que si $z=a+ib$, alors $z\overline{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2\in\mathbb{R}_+$

Définition 7 (Module).

Le *module* d'un nombre complexe $z=a+ib$ est le nombre $|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$.

On a donc, si $z=a+ib$ est l'écriture algébrique, alors $|z|^2=a^2+b^2=\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2$.
Le **module** de z correspond à la **norme** du vecteur image $\vec{w}(z)$.

Remarque 5 (Distance entre deux points).

Soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points du plan complexe $(O;\vec{u};\vec{v})$ et leurs affixes respectives.
Alors $AB=|b-a|=\|\overrightarrow{AB}\|$.

▶ Exercice 8 Application

Représenter l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que

1. $|z-1|=|z-2i|$
2. $|z-3-2i|\leqslant 2$

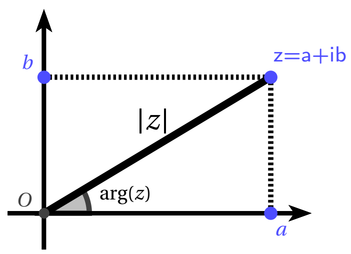
6 Écriture trigonométrique d'un nombre complexe

6.1 Module et argument

Définition 8 (Module et argument).

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, soit z un nombre complexe et M le point d'affixe z.

- On appelle *module de z* la distance OM et on le note $|z|$.
- On appelle *argument de z* une mesure de l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$ et on le note $\arg(z)$.
- ⚠le nombre 0 n'a pas d'argument et un module nul.



On remarque que si $z=a+ib$, alors $z\overline{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2\in\mathbb{R}_+$, donc, grâce au théorème de Pythagore,

Propriété 7 (Expression du module d'un nombre complexe).

Le *module* d'un nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre réel positif $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

On a donc, si $z = a + ib$ est l'écriture algébrique, alors $|z|^2 = z\overline{z} = a^2 + b^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$.

Le **module** de z correspond à la **norme** du vecteur image $\vec{w}(z)$.

6.1.1 Propriétés du module

Propriété 8 (Module et conjugué).

$|\overline{z}| = |z|$

Propriété 9 (Module et opérations).

- Produit : $|zz'| = |z||z'|$.
- Puissances : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$
- Inverse : $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
- Quotient : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Propriété 10 (Inégalité triangulaire).

$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

6.1.2 Propriété de l'argument

Remarque 6 (Notation argument).

$\arg(z)$ est défini à $2k\pi$ près. On note donc $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Propriété 11 (Propriétés de l'argument).

Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}^*$,

- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad [2\pi]$: *L'argument de l'opposé est* . . . .
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$: *L'argument du conjugué est* . . . .
- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$: *L'argument du produit est* . . . . *tiens, tiens...*
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\arg\left(z^n\right) = n \arg(z) \ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]$: *L'argument de l'inverse est* . . . .
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$: *L'argument du quotient est* . . . .

Remarque 7.

$\boxed{z = 0 \Longleftrightarrow |z| = 0}$ mais 0 n'a pas d'argument.

■ Exemple 3:

Quelques arguments de référence :

- $\arg(\mathrm{i}) \equiv \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi]$.
- Un nombre réel strictement positif : $\forall x \in]0; +\infty[$, $\arg(x) \equiv 0 \ [2\pi]$.
- Un nombre réel strictement négatif : $\forall x \in]-\infty; 0[$, $\arg(x) \equiv \pi \ [2\pi]$.

Ainsi,

l'argument d'un nombre réel non nul est $0 \ [\pi]$ (0 ou π suivant son signe)
L'argument d'un imaginaire pur non nul est $\dfrac{\pi}{2} \ [\pi]$

▶ Exercice 9

Déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe z tels que

1. $|z| = 3$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$

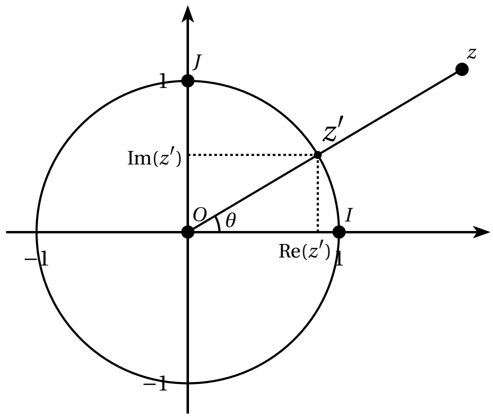
6.2 Détermination du module et de l'argument

On sait déjà que si $z = a + \mathrm{i}b$, $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Propriété 12.

Si $z = a + ib$, a et b étant deux réels, si $\theta = \arg(z)$, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$



▶ Exercice 10 Résultats à connaître quasiment par cœur

Déterminer le module et l'argument des deux nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + \mathrm{i} \qquad z_2 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$$

6.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

D'après les formules de calcul du module et de l'argument, un nombre complexe est défini de façon unique par son module et son argument

Définition 9 (Forme trigonométrique).

Soit $z \in \mathbb{C}$, si on pose $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, alors

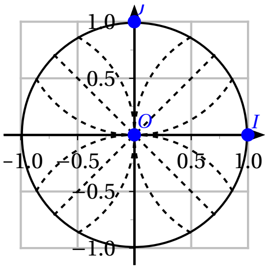
$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

Cette écriture s'appelle *forme trigonométrique du complexe z*.

■ Exemple 4:

Soit $z = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$. $r = |z| = \sqrt{2^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$.

Ainsi, en factorisant par r, $z = 4\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et on cherche θ tel que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$:



On a donc $\theta = \ldots\ldots$
Et l'écriture trigonométrique de z est :

$$z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque 8.

Attention, si $z = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$, alors cette écriture n'est pas l'écriture trigonométrique de z ! Pourquoi ?

▶ Exercice 11

Pour chacun des nombres complexes suivants, dire s'il est sous forme trigonométrique et déterminer, si c'est le cas, son module et son argument.

1. $z_1 = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$
2. $z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$
3. $z_3 = \cos\frac{\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}$
4. $z_4 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$
5. $z_5 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$
6. $z_6 = 3\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$
7. $z_7 = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$
8. $z_8 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right)$

7 Forme exponentielle

7.1 Exponentielle d'un imaginaire pur

Si on pose, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$, calculons $f(\theta + \theta')$:

Ceci nous amène à la définition suivante :

Définition 10 ($\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$).

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit l'exponentielle de l'imaginaire pur $i\theta$:

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}$$

■ Exemple 5:

$e^{i\frac{\pi}{6}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

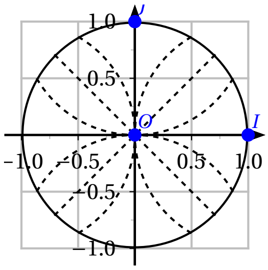
Remarque 9.

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |e^{i\theta}| = \ldots}$$

Ce sont tous les nombres complexes appartenant au cercle trigonométrique qui s'écrivent de la sorte !

Placer sur la figure ci-contre les points ayant pour affixes les nombres complexes suivants :

- $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}$
- $z_2 = e^{i\pi}$
- $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$
- $z_4 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
- $z_5 = e^{2i\pi}$



▶ Exercice 12 Racines troisièmes de l'unité

1. Démontrer que $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$.
2. En déduire l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^3 = 1$.
3. Quelles relations existe-t-il entre les deux racines complexes de cette équation ?
4. Donner l'écriture exponentielle de ces trois racines. Les placer dans le plan complexe.

7.2 Écriture exponentielle d'un nombre complexe

Définition 11 (Écriture exponentielle).

Si $z \in \mathbb{C}^*$, de module $r \in]0; +\infty[$ et d'argument $\theta \in \mathbb{R}$, alors $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \boxed{re^{i\theta}}$.
Cette dernière écriture est appelée *écriture exponentielle du complexe z*.
Réciproquement, si $z = ae^{ib}$, avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, alors z est le nombre complexe de module a et d'argument congru à b modulo 2π.

7.3 Calculer avec la forme exponentielle

La forme exponentielle permet des calculs assez naturels, en respectant la propriété de la fonction exp :

Propriété 13.

Pour tous les réels θ et θ',

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
2. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots$
3. $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta'}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
4. Formule de « De Moivre » :

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

Qui se formule aussi de la façon suivante :

$$(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$

▶ Exercice 13

On pose $z_1 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$. Donner la forme exponentielle des nombres complexes $z_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z_1^2$ et $z_3 = \dfrac{2z_1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$.

▶ Exercice 14

1. Déterminer le module et l'argument du nombre $Z = 2\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)\left(\cos\frac{\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right)^2$
2. Déterminer la forme algébrique de $\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}$

▶ Exercice 15 **Formules de trigonométrie**

Retrouver les formules d'addition des sinus et cosinus en utilisant l'écriture $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

8 Applications à la géométrie

8.1 Considérations générales

On rappelle que si $M(z)$ dans le repère du plan complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$, alors $\arg(z) = \left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$

Propriété 14.

Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs du plan d'affixes respectives z et z'. Alors le complexe $\dfrac{z'}{z}$ a pour module le quotient $\dfrac{|z'|}{|z|}$ et pour argument l'angle $\left(\vec{a}; \vec{b}\right)$.

<u>**Démonstration**</u>

On a $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $z' = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ et $\dfrac{z'}{z} = r"\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta"}$.

Alors $z' = \dfrac{z'}{z}z \Longleftrightarrow r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = r"\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta"} \times r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = rr"\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta")}$ et, par unicité de l'écriture,

$$\begin{cases} r' = rr" \\ \theta' = \theta+\theta" \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} r" = r'/r \\ \theta" = \theta'-\theta \end{cases}$$

et $\theta'-\theta$ est bien une mesure de $\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.

□

Propriété 15.

Si A, B, C et D sont quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D, alors le complexe $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ a pour module le nombre $\dfrac{CD}{AB}$ et pour argument l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$.

8.2 En pratique !

Conséquence 1.

Avec les mêmes notations que la propriété précédente :

1. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ est réel.
2. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ est imaginaire pur.
3. $AB = CD$ si et seulement si $\left|\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right| = 1$

⚠On utilisera toujours les déterminations des modules et arguments pour justifier le parallélisme, alignement ou perpendicularité. Jamais brutalement en appliquant cette propriété, mais elle est là pour vous faire comprendre le lien entre les complexes et la géométrie.

Toujours étudier le quotient $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$!

▶ Exercice 16

A, B, C trois points d'affixes respectives : $z_A = 2\mathrm{i}$, $z_B = 2+\mathrm{i}$, $z_C = 1-\mathrm{i}$. Démontrer que le triangle ABC est isocèle rectangle en B.

▶ Exercice 17

Pour tout $z \neq 2-\mathrm{i}$, on considère $z' = \dfrac{z-\mathrm{i}}{z-2+\mathrm{i}}$.

On appelle (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un réel.

1. Déterminer l'ensemble (E) en utilisant l'expression algébrique de z'
2. Déterminer l'ensemble (E) en utilisant un argument de z'.

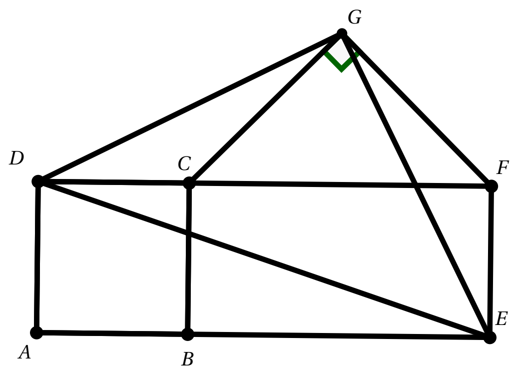
▶ Exercice 18

Même exercice si $z \neq -1$ et $z' = \dfrac{z-1-2\mathrm{i}}{z+1}$.
(E) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un réel et (G) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un imaginaire pur.

▶ Exercice 19

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré et $BEFC$ un rectangle tel que $BE = 2AB$. Le triangle CGF est rectangle en G.

Démontrer que le triangle DGE est rectangle isocèle en G.
Indication : Poser un repère complexe.



▶ Exercice 20 **Le pentagone régulier**

On considère le nombre complexe $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$ et l'équation (E) : $z^5 = 1$.

1. (a) Si z est solution de E, quelle est la valeur de son module $|z|$.
   (b) Vérifier que pour tout entier naturel n, ω^n est solution de (E).
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, comparer z^{n+5} et z^n.
2. (a) Démontrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, on a :
   $$z^5 - 1 = (z-1)\left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4\right)$$
   (b) En déduire la valeur de $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$
3. On pose $u = \omega + \overline{\omega}$ et $v = \omega^2 + \overline{\omega^2}$
   (a) Montrer que $u + v = -1$ et que $uv = -1$.
   (b) En utilisant un polynôme de degré 2, déterminer les valeurs de u et v puis en déduire que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.
4. Le plan complexe est muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$. On appelle Ω_0 le point d'affixe 1, J le point d'affixe i et M le point d'affixe $-\dfrac{1}{2}$.
   (a) Placer les points Ω_0, J et M dans le repère.
   (b) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre M et passant par J.
   On appelle N l'intersection du cercle avec la demi-droite $[O\Omega_0)$.
   (c) Construire à la règle et au compas les points Ω_1, Ω_2, Ω_3 et Ω_4 d'affixes respectives ω, ω^2, ω^3 et ω^4, puis tracer le pentagone régulier $\left(\Omega_0\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4\right)$.