

Feuille de TD n°7

Récurrence

Exercice 1 *Somme des cubes*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{i=1}^n i^3$. Montrer, par récurrence que $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 2 Montrer par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, que 4 divise $5^n - 1$.

Exercice 3 *Initialisation pas à 0 :*

1. Dresser le tableau de signes de $2x^2 - (x+1)^2$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 4$, on a $2^n \geq n^2$

Exercice 4 *Hérédité ne suffit pas :*

On considère la propriété $P(n)$: « $10^n + 1$ est divisible par 9 ».

1. Montrer que $P(n)$ est héréditaire
2. $P(n)$ est-elle vraie pour tout n ?

Exercice 5 *Démontrer une formule :*

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1}$.

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 6 *En géométrie*

Montrer que la somme des angles d'un polygone convexe à n côtés est égale à $(n-2)\pi$ radians

Exercice 7 *Suite arithmético-géométrique :*

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n + 8$.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 5^n - 2$.

Exercice 8 *Suite homographique — Problème 1*

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 . On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
(b) Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
(c) Établir que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.
(d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$
2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
 - (a) Établir que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.
 - (b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
 - (c) On admet que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 9 Histoires de moyennes — Problème 2

1. On considère le programme Python suivant :

```

from math import sqrt

a=float(input("Saisir un nombre positif non nul"))
b=float(input("Saisir un nombre positif non nul"))
N=int(input("Saisir un nombre entier non nul"))

u,v=a,b

for k in range(N):
    u=(a+b)/2
    v=sqrt((a**2+b**2)/2)
    a=u
    b=v
print(u,v)

```

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millièème.

k	a	b	u	v
	4	9		
0				
1				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = a, v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
 - Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.
En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq v_n$.
- Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2 . En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .

Exercice 10 On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

- Vérifier l'inégalité $1 \leq u_n \leq 2$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$

- En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 11 On pose, pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$S_n = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \dots + (n-1)2^{n-2}$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $S_n = (n-1)2^n - n2^{n-1} + 1$

► Exercice 1 Écriture terme général d'une SAG : Deux approches

On considère la suite (u_n) définie pour tout n entier naturel par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n + 8 \end{cases}$.

Les deux questions qui suivent sont indépendantes et permettent de déterminer le terme général de la suite.

1. Montrer par récurrence que $u_n = 3 \times 5^n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 2$.
 - (a) Démontrer que la suite v_n est géométrique.
 - (b) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 12 La suite (v_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \frac{2v_n + 1}{v_n} \end{cases}$.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq v_n \leq 3$.

Exercice 13 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \end{cases}$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
2. Quelle conjecture peut-on formuler quant à l'écriture de u_n en fonction de n ? (forme explicite)
3. Démontrer la conjecture.

Exercice 14 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer les premiers termes u_1 , v_1 , u_2 et v_2 à la main.
2. Utiliser un tableur pour calculer les 30 premiers termes de chaque suite. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de chaque suite?
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = v_n - u_n$ et $b_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.
 - (a) Compléter, sur le tableur, le fichier précédent pour qu'il affiche les 30 premiers termes de (a_n) et (b_n)
 - (b) Déterminer l'expression explicite des termes a_n et b_n .
 - (c) En déduire l'expression explicite des termes u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Écrire un algorithme ou un programme en Python pour déterminer la première valeur de n telle que l'écart entre u_n et v_n est inférieur à 10^{-3} .
Si codé sur Python, donner la valeur de n renvoyée par le programme.

Exercice 15 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} \end{cases}$$

Partie I Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 , données sous forme de fractions irréductibles.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4 .

3. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .

Partie II **Validation de conjecture**

On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq v_n \leq 0$.
3. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$$

- (b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n) puis celui de (u_n) .

Feuille de TD n°7

Indications, réponses ou Solutions

Exercice 1 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{P}_n : S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Initialisation : $S_0 = 0^3 = 0$ et $\frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$, donc \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier tel que \mathcal{P}_n est vraie, autrement dit, $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

$$S_{n+1} = \underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}_{S_n} + (n+1)^3$$

Par hypothèse, on peut dire que $S_{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$. Ici, il faut absolument factoriser.

$$S_{n+1} = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1 \right) = \frac{(n+1)^2 \overbrace{(n^2 + 4n + 4)}^{(n+2)^2}}{4}$$

Ainsi, $S_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

Donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion : La propriété \mathcal{P}_n est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 2 Soit $\mathcal{P}_n : 4$ divise $5^n - 1$.

Init facile.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_n est vraie.

$$5^{n+1} - 1 = 5 \times 5^n - 1 = 5 \times (5^n - 1 + 1) - 1 = 5 \times \underbrace{(5^n - 1)}_{\text{div. par 4}} + \underbrace{5 - 1}_{\text{div. par 4}}$$

Donc $5^{n+1} - 1$ est divisible par 4. Donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Exercice 3

1. $2x^2 - (x+1)^2 = x^2 - 2x - 1$, de racines $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2} \approx 2,414$.

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$	
$x^2 - 2x - 1$	+	0	-	0	+

Donc, pour tout $n \geq 1 + \sqrt{2}$, $2^n \geq (n+1)^2$.

2. *Init* : On pose $\mathcal{P}_n : 2^n \geq n^2$

Si $n = 4$, $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$. Donc \mathcal{P}_4 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ tel que \mathcal{P}_n est vraie.

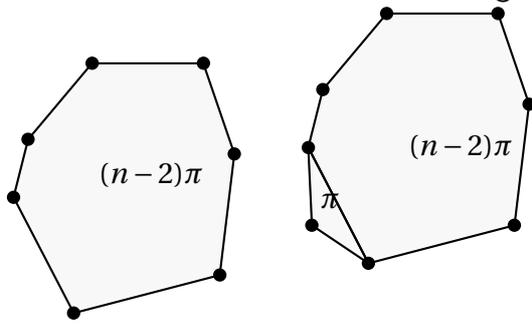
$2^{n+1} = 2 \times 2^n$, or, par hypothèse de récurrence, $2^n \geq n^2$ et comme $n \geq 4$, $n^2 \geq (n+1)^2$.

Ainsi, $2^{n+1} \geq (n+1)^2$, donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion : gnagnagna

Exercice 5 Vrai en 0. Hérédité : Si $v_n = \frac{1}{n+1}$, alors $v_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{1}{n+2}$ et donc la propriété est héréditaire.

Exercice 6 Raisonnement sur une figure :



Un polygone à $n+1$ côtés peut être découpé en un polygone n côtés et un triangle. La somme des angles est donc égale à $\pi + (n-2)\pi = ((n+1)-2)\pi$.

Exercice 7 On pose $\mathcal{P}_n: u_n = 3 \times 5^n - 2$

Init : Si $n = 0$, $u_0 = 1$ et $3 \times 5^0 - 2 = 3 - 2 = 1$

Hérédité : Supposons que \mathcal{P}_n est vraie.

$u_{n+1} = 5u_n + 8 = 5 \times (3 \times 5^n - 2) + 8 = 3 \times 5 \times 5^n - 10 + 8 = 3 \times 5^{n+1} - 2$, donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.