

Chapitre 7 : Principe de récurrence

Premières applications aux suites

1 Le principe de récurrence

1.1 Axiome de récurrence

Le principe de récurrence est ce que l'on appelle un *axiome* en mathématique. Il est basé sur la construction « rigoureuse » de l'ensemble des entiers \mathbb{N} . Il est équivalent à la propriété de \mathbb{N} : « Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément ». Ceci signifie que *si l'on admet cette propriété, on peut démontrer le principe de récurrence* ou que si l'on admet le principe de récurrence, on peut démontrer la propriété du plus petit élément.

Théorème 1 (Principe de récurrence).

Si une propriété \mathcal{P} , définie en fonction d'un nombre entier naturel n (on notera alors \mathcal{P}_n) est vraie pour un certain entier n_0 et est *héréditaire* (si elle est vraie à un certain rang arbitraire, alors elle l'est au rang suivant) alors on peut affirmer qu'elle est vraie **pour tout** $n \geq n_0$.

En particulier, on utilisera (ou on essaiera) d'employer un raisonnement par récurrence lorsqu'on doit prouver une propriété donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

REMARQUE 1

L'idée est celle de l'escalier :

- Si l'on pose un pied quelque part sur l'escalier
- Si on a la **capacité** de passer d'une marche à l'autre

Alors on pourra mettre le pied sur toutes les marches en amont de la marche initiale.

Les *propriétés* peuvent être

des égalités : Pour tout entier naturel n non nul, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

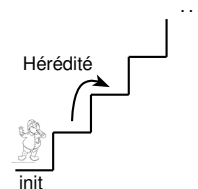
des inégalités : Pour une certaine suite (u_n) , pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer que $u_n \leq 10\,000$

des assertions : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer que $10^n - 1$ est divisible par 9.

Chacune de ces propriétés ont en commun d'être indexées sur l'ensemble des entiers naturels.

Attention : On ne démontrera pas par récurrence une propriété de la forme :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \sin x \leq |x|$$



1.2 Rédaction d'un raisonnement par récurrence

On va démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On pose, pour n un entier naturel quelconque, \mathcal{P}_n : « $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

On veut prouver que \mathcal{P}_n est **VRAIE** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La démonstration se fera en 3 étapes :

★ **Initialisation** : Si $n = 1$, $\sum_{i=1}^1 i^2 = 1^2 = 1$ et $\frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$, donc la propriété \mathcal{P}_n est vraie au rang 1, on peut aussi écrire *la propriété \mathcal{P}_1 est vraie*.

★ **Hérédité** : Soit n un entier tel que la propriété \mathcal{P}_n est vraie.

Ainsi, $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, c'est ce que l'on appelle l'**hypothèse de récurrence (HR)**.

On veut prouver la propriété au rang suivant, soit \mathcal{P}_{n+1} (écriture ?)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 \\ &= \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{\text{HR}} + (n+1)^2 \\ &= (n+1) \left(\frac{n(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)}{6} \right) \\ &= (n+1) \frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} \end{aligned}$$

Si on étudie le trinôme $2n^2 + 7n + 6$, on remarque que -2 est une racine évidente et on a $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$.

Ainsi, $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = (n+1) \frac{(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ et la propriété \mathcal{P}_{n+1} est démontrée.

★ **Conclusion** : La propriété \mathcal{P}_n est vraie au rang 1 et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geq 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

► EXERCICE 1

Application

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Démontrer par récurrence que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

► EXERCICE 2

Inégalité de Bernoulli

Démontrer que pour tout $a \in]0; +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$

2 Premières applications aux suites

2.1 Suites bornées

Définition 1 (Majorée, minorée, bornée).

- On dit qu'une suite (u_n) est *majorée* s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$
- On dit qu'une suite (u_n) est *minorée* s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$
- On dit qu'une suite est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Propriété 1 (Suite bornée (2)).

La suite (u_n) est bornée si et seulement si il existe un nombre réel positif M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

► EXERCICE 3

Suite majorée, méthode directe

On considère la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,2u_n + 0,6$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.

► EXERCICE 4 Suite bornée

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.

2.2 Sens de variation

Définition 2 (Suites croissantes, décroissantes, constante).

Soit une suite (u_n) . On dit que

- (u_n) est *croissante* [resp. strictement croissante] si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ [resp. $> u_n$].
- (u_n) est *décroissante* [resp. strictement décroissante] si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ [resp. $< u_n$].
- (u_n) est *constante* ou *stationnaire* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

On va pouvoir parfois utiliser le principe de récurrence pour prouver qu'une suite est croissante ou décroissante.

► EXERCICE 5

Montrer, par récurrence que la suite (u_n) définie par $u_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ est strictement décroissante.

► EXERCICE 6

Un cas défavorable...

Soit v_n définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{2v_n + 1}{v_n + 1}$. Montrer que (v_n) est croissante.

Propriété 2.

Si f est une fonction croissante sur un intervalle I à valeurs dans I . Si (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Alors la suite (u_n) est **monotone**.

► EXERCICE 7

Application

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0,5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f qui est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 2x$

1. Étudier les variations de f sur \mathbb{R} .
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$.
3. Interpréter le résultat obtenu.