Correction DS n°4 CPES

Exercice 1

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 0 \\ x - 2y + z = -4 \\ 3x + y - 2z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + z = -4 \\ 4x - y + 2z = 0 \\ 3x + y - 2z = 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{matrix} \\ L_2 - 4L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{cases} x - 2y + z = -4 \\ 7y - 2z = 16 \\ 7y - 5z = 19 \end{cases} \iff \begin{matrix} \\ \\ L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} x - 2y + z = -4 \\ 7y - 2z = 16 \\ -3z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y - 1 = -4 \\ 7y = 14 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

La solution du système est le triplet $(1;2;-1)$

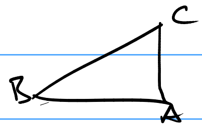
Exercice 2

$A(-2;0)$ $B(2;3)$ $C(-3;3)$

1°) $BC = 5$ $\quad \vec{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ $\quad AB = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$ $\quad \vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ $\quad AC = \sqrt{10}$

Donc $AB = BC$, donc ABC est isocèle en B

2°) D'après la formule d'Al-Kashi dans le triangle ABC



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\, AB \times BC \times \cos \hat{B}$$

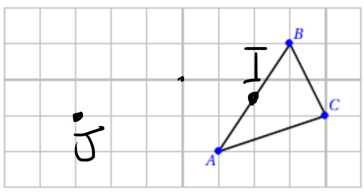
$$\cos \hat{B} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2\, AB \times BC} = \frac{25 + 25 - 10}{2 \times 5 \times 5} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$$

Ainsi $\hat{B} \simeq 37°$

3°) Comme ABC est isocèle en B, on a $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = (180 - 37) : 2$
$\simeq 71{,}5°$

Exercice 3

1°)



2°) a) Dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ $\quad A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$

De plus I milieu de $[AB]$ donc $I\left(\frac{1}{2};0\right)$ et

$$\vec{AJ} = \vec{AB} - 2\vec{AC} \iff J(1;-2)$$

2) b) Ainsi $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 1\\-1 & -2\end{vmatrix} = -1-(-1) = 0$

donc $\det(\overrightarrow{CI},\overrightarrow{AJ}) = 0$ donc $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires $(\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{CI})$

Ainsi, $(CI) \parallel (AJ)$

Exercice 4, ABCD étant un parallélogramme de centre O
O est le milieu des diagonales.

Dans le triangle ABD, $AB^2 + AD^2 = 2AO^2 + \frac{BD^2}{2}$

ABD, $BC^2 + CD^2 = 2CO^2 + \frac{BD^2}{2}$

Ainsi, $AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = 2AO^2 + 2CO^2 + BD^2$

$= 2\left[\left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AC\right)^2\right] + BD^2$

$= 2\left(\frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}AC^2\right) + BD^2$

$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

Exercice 5

Calcul de BC

$\widehat{ACB} = 180 - (75+55) = 50°$

D'après la loi des sinus, $\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = \frac{BC}{\sin 75} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin 50} = \frac{BC}{\sin 75}$

$\Leftrightarrow BC = 5\frac{\sin 75}{\sin 50} \simeq 6,3\text{ cm}$

Calcul de DF

D'après le th. d'Al-Kashi

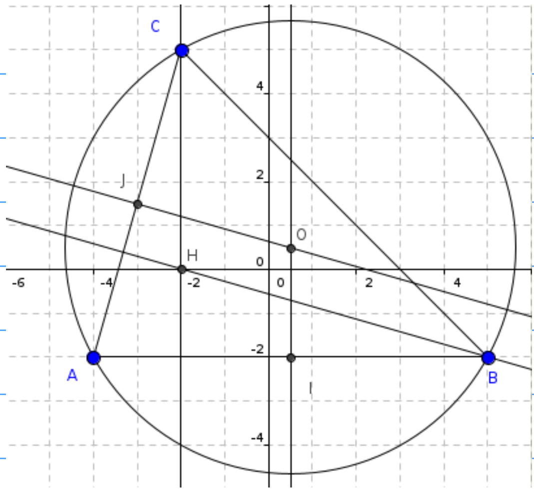
$DF^2 = ED^2 + EF^2 - 2ED \times EF \times \cos 135° \simeq 25 - 24\cos 135° = 25 + 12\sqrt{2}$

Donc $DF \simeq 6,5\text{ cm}$.

Problème

$A(-4;-2)$ $B(5;-2)$ $C(-2;5)$

I milieu de $[AB]$, J milieu de $[AC]$



1°) $I\left(\frac{-4+5}{2} ; \frac{-2-2}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{1}{2};-2\right)$

$J\left(\frac{-4-2}{2} ; \frac{-2+5}{2}\right)$ donc $J\left(-3;\frac{3}{2}\right)$

2°) Médiatrice de $[AC]$: passe par J est de vecteur normal $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $2x+7y=\frac{9}{2}$

3°) Médiatrice de $[AB]$: passe par I, de vecteur normal $\vec{AB}\begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix} = 9\times\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=1$

4°) Ω est l'intersection des médiatrices donc ses coordonnées (x,y) sont solution du système $\begin{cases}2x+7y=\frac{9}{2}\\2x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7y=\frac{7}{2}\\x=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$

donc $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

5°) Γ : $x^2+y^2-x-y=26 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=26,5$

or $\left(x_A-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y_A-\frac{1}{2}\right)^2 = (-4,5)^2+(-2,5)^2 = 20,25+6,25$
$=26,5$

Donc Γ est le cercle de centre Ω, passant par A
donc c'est bien le cercle circonscrit au triangle

Son rayon est $R=\sqrt{26,5}=\sqrt{\frac{53}{2}}$.

6°) a) h_C : $x=-2$
h_B : $2x+7y=-4$
↑
par vecteurs normaux

b) $\begin{cases}x=-2\\-4+7y=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $H(-2;0)$

6°) c) $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=26 \\ 2x+7y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+4y^2-4x-4y=104 \\ 2x=-7y-4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (-7y-4)^2+4y^2+2(7y+4)-4y=104 \\ x=\dfrac{-7y-4}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 53y^2+66y-80=0 \\ x=\dfrac{-7y-4}{2} \end{cases}$

$\Delta = 66^2+4\times 80\times 53 = 21316 = 146^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-66-146}{106} \quad \text{ou} \quad y=\dfrac{-66+146}{106} \\ x=\dfrac{-7y-4}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y=\dfrac{40}{53} \simeq 0{,}75 \\ x=\dfrac{-492}{106} \simeq -4{,}64 \end{cases}$

Donc $D\left(-\dfrac{246}{53} ; \dfrac{40}{53}\right)$

6.d) Soit M le milieu de $[HD]$: $M\left(-\dfrac{352}{106} ; \dfrac{40}{106}\right)$

$M\left(-\dfrac{176}{53} ; \dfrac{20}{53}\right)$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} -\frac{176}{53}+4 \\ \frac{20}{53}+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{36}{53} \\ \frac{126}{53} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AB}) = 7\times\dfrac{36}{53} - 2\times\dfrac{126}{53} = 0.$

donc M est sur la droite (AB).

donc (AB) est perpendiculaire à [HD] et la coupe en son milieu donc le symétrique de l'orthocentre appartient à Γ.