

## Correction DS n°3 CPES

### Exercice 1 :

$f$  définie par  $f(x) = \frac{4}{(3x^2 - 5x + 4)^5}$

$g$  définie par  $g(x) = x(1 - \sqrt{1-x^2})$

$h$  définie par  $h(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-4}$

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 \times (3x^2 - 5x + 4)^{-5} \\ f'(x) &= -5 \times 4 \times (6x - 5) \times (3x^2 - 5x + 4)^{-6} \\ f'(x) &= \frac{-20(6x - 5)}{(3x^2 - 5x + 4)^6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1 - \sqrt{1-x^2}) + x \times \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}(1 - \sqrt{1-x^2}) + x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2} - (1-x^2) + x^2}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - 1 + 2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(x-4) \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - 1 \times \sqrt{x+1}}{(x-4)^2} = \frac{(x-4) - 2(x+1)}{(x-4)^2 \sqrt{x+1}} = \frac{-x-6}{(x-4)^2 \sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

### Exercice 2 :

$$f(x) = \frac{2}{2 + \cos x}$$

1°)  $f(x)$  définie  $\Leftrightarrow 2 + \cos x \neq 0$  or  $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1$

donc  $1 \leq 2 + \cos x \leq 3$  donc  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$

2°) Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = \frac{2}{2 + \cos(-x)} = \frac{2}{2 + \cos(x)} = f(x)$

Donc  $f$  est paire

3°) Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x+2\pi) = \frac{2}{2 + \cos(x+2\pi)} = \frac{2}{2 + \cos x} = f(x)$

Donc  $f$  est  $2\pi$ -périodique

### Exercice 3

1.  $\sqrt{x^2 - 12} = 2x - 1$

2.  $|2x + 3| = |2 - x|$

1°)  $\sqrt{x^2 - 12} = 2x - 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 12 = (2x - 1)^2$  et  $2x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 12 = 4x^2 - 4x + 1$  et  $x \geq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 13 = 0$  et  $x \geq \frac{1}{2}$

$\Delta = 16 - 12 \times 13 < 0$

Donc  $\mathcal{S} = \emptyset$

2°)  $|2x + 3| = |2 - x| \Leftrightarrow 2x + 3 = 2 - x$  ou  $2x + 3 = -2 + x$

$\Leftrightarrow 3x = -1$  ou  $x = -5$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$  ou  $x = -5$

$\mathcal{S} = \{-5; -\frac{1}{3}\}$

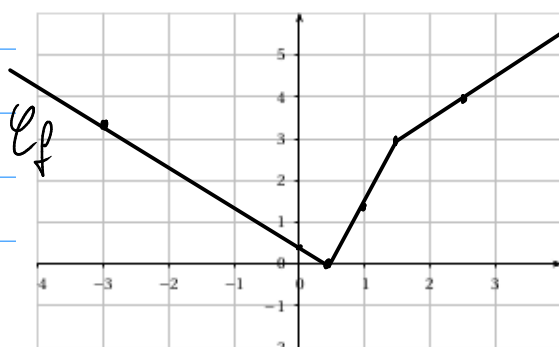
Exercice 4:  $f(x) = |2x - 1| - \frac{1}{2}|3 - 2x| + 1$

1°)  $f(0) = |-1| - \frac{1}{2}|3| + 1 = 1 - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2}$   
 $f(1) = |1| - \frac{1}{2}|1| + 1 = 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

2°) Ecrire sans valeurs absolues

| $x$                    | $-\infty$          | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$      | $+\infty$         |
|------------------------|--------------------|---------------|--------------------|-------------------|
| $ 2x - 1 $             | $1 - 2x$           | $\emptyset$   | $2x - 1$           |                   |
| $ 3 - 2x $             | $3 - 2x$           |               | $\emptyset$        | $2x - 3$          |
| $-\frac{1}{2} 3 - 2x $ | $-\frac{3}{2} + x$ |               | $\emptyset$        | $\frac{3}{2} - x$ |
| $f(x)$                 | $\frac{1}{2} - x$  | $\emptyset$   | $3x - \frac{3}{2}$ | $x + \frac{3}{2}$ |

3°)



$f(-3) = \frac{1}{2} + 3 = 3,5$

$f(4) = 4 + \frac{3}{2} = 5,5$

Exercice 5  $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$

1.) fonction  $g: x \mapsto x^3 + 3x + 8$

1-a)  $g$  est une somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , donc  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

1-b)  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1) > 0$   
donc  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

1-c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  par sommes.

1-d) Sur  $] -\infty, +\infty [$   
 $\ast g$  est continue car dérivable  
 $\ast g$  est strictement croissante  
 $\ast 0 \in ] \lim_{-\infty} g ; \lim_{+\infty} g [$

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique  $\alpha \in \mathbb{R}$   
 tel que  $g(\alpha) = 0$  -1,52 <  $\alpha$  < -1,51

1°) e) 

|        |           |          |           |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | $-$       | $0$      | $+$       |

 par croissance de  $g$  sur  $\mathbb{R}$

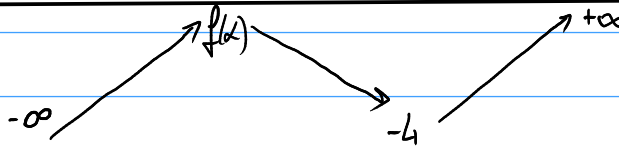
2°) Etude  $f$ .

2a)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$  donc  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

2.b)  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(x^2 + 1)(3x^2) - (x^3 - 4) \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$

$$= \frac{x^4 + 3x^2 + 8x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x \times g(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

2-c)

|         |           |                                                                                    |             |           |
|---------|-----------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$                                                                           | $0$         | $+\infty$ |
| $x$     |           | $-$                                                                                | $\emptyset$ | $+$       |
| $g(x)$  |           | $-$                                                                                | $\emptyset$ | $+$       |
| $f'(x)$ |           | $+$                                                                                | $\emptyset$ | $+$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ |  |             |           |

2-d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  est une forme indéterminée du type  $\frac{\infty}{\infty}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \frac{x^3(1 - \frac{4}{x^3})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = x \times \frac{1 - \frac{4}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Par opérations sur les limites,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2-e)  $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$  a  $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = -3x - 8$

Ainsi  $f(x) = \frac{-3x - 8 - 4}{x^2 + 1} = \frac{-3x - 12}{x^2 + 1} = -3 \frac{(x + 4) \times x}{(x^2 + 1) \times x}$

$$f(x) = -3 \frac{x(x + 4)}{x^3 + x} = -3x \times \frac{x + 4}{-3x - 8 + x}$$

$$= -3x \times \frac{x - 4}{-2x - 8} = \frac{-3x}{-2} \times \frac{x + 4}{x + 4}$$

Donc  $f(x) = \frac{3}{2}x$  et ainsi  $\frac{3}{2}x(-1,52) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}(-1,51)$

$$f(x) \approx 2,26$$

### 3. Comportement en l'infini.

$$\begin{aligned} 3-a) \quad ax+b + \frac{cx+d}{x^2+1} &= \frac{(ax+b)(x^2+1)+cx+d}{x^2+1} \\ &= \frac{ax^3+bx^2+(a+c)x+d}{x^2+1} \end{aligned}$$

Par identification,  $ax^3+bx^2+(a+c)x+d = x^3-4$   
soit seulement si  $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ a+c=0 \\ d=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-1 \\ d=-4 \end{cases}$

Donc  $f(x) = x + \frac{-x-4}{x^2+1}$

$$3-b) \quad f(x) - x = -\frac{x+4}{x^2+1} = -\frac{x(1+\frac{4}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = -\frac{1}{x} \times \frac{1+\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = 0$

$y=x$  est une asymptote oblique de la courbe  $\mathcal{C}$ .

4°)

