Exercice 1

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - xe^x + 1$$

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produits de fonctions dérivables.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\underline{g'(x) = e^x - xe^x - e^x = -xe^x}$ du signe de $-x$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$. On a donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $-x$		$+$	0	$-$	
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Var° de g		$\nearrow$	2	$\searrow$	

2. Si $x < 0$, alors $-xe^x > 0$, donc $e^x - xe^x > 0$ et ainsi, $\underbrace{e^x - xe^x + 1}_{g(x)} > 1$.

3. Sur l'intervalle $[1\,;2]$.
   - ⋆ $g(1) = 1$ et $g(2) = 1 - e^2 < 0$.
   - ⋆ g est continue car dérivable
   - ⋆ g est strictement décroissante

   Donc d'après la propriété des valeurs intermédiaires, $\underline{g(x) = 0 \text{ admet une solution unique } \alpha \text{ sur } [1\,;2]}$.

   Par ailleurs, sur $]-\infty\,;0]$, $g(x) > 1$ donc ne s'annule pas, sur $[0\,;1]$, $g(x) > g(1) > 0$ et sur $[2\,;+\infty[$, $g(x) < g(2) < 0$

   On peut donc en déduire que α est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ à l'équation $g(x) = 0$.

   En utilisant la table de la calculatrice, on trouve $\underline{1{,}27 < \alpha < 1{,}28}$.

4. Comme $g(\alpha) = 0 \iff e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 = 0 \iff e^\alpha(1-\alpha) = -1$ et $\alpha > 1$, donc $\boxed{e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}}$.

5. g s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$, en α et $g(0) = 2$, on peut en déduire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de g		$+$	0	$-$	

Partie B

Soit la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \mapsto \frac{4}{e^x + 1}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'origine O.

1. Soit $\mathscr{A}$ la fonction qui, à tout $x \in \mathbb{R}_+$, associe l'aire du rectangle $BOUM$.
   (a) Le rectangle $BOUM$ a une surface de $\underline{\mathscr{A}(x) = x \times f(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}}$.
   (b) $\mathscr{A}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathscr{A}'(x) = \dfrac{(e^x + 1) \times 4 - 4xe^x}{(e^x + 1)^2} = \boxed{\dfrac{4g(x)}{(e^x + 1)^2}}$.
   Comme pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{4}{(e^x + 1)^2} > 0$, on en déduit que $\underline{\mathscr{A}' \text{ est du signe de } g}$.

(c) Ainsi,

x	0		α		$+\infty$
Signe de $\mathscr{A}'$		$+$	0	$-$	
Var° de $\mathscr{A}$	0	$\nearrow$	$\mathscr{A}(\alpha)$	$\searrow$	

2. On voit dans le tableau de variations que l'aire du rectangle $BOUM$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
   En utilisant la table de la calculatrice, on voit que $\underline{1,1138 < \mathscr{A}(\alpha) < 1,1139}$.
3. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse α est égal à $f'(\alpha)$. Or, $f'(x) = -\dfrac{4\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$. Par ailleurs, le coefficient directeur de (BU) sera : $-\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$
   On va utiliser le fait que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

$$f'(\alpha) = -\frac{4 \times \frac{1}{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)^2} = -\frac{4}{(\alpha-1)\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2} = -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$$

$$-\frac{f(\alpha)}{\alpha} = -\frac{4}{\alpha(\mathrm{e}^{\alpha}+1)} = -\frac{4}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)} = -\frac{4}{\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)} = -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$$

   Ainsi, $f'(\alpha) = -\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$ et donc la tangente au point d'abscisse α est parallèle à la droite (BU).

Exercice 2

On s'intéresse à $(E)\ :\ \mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x}$.

partie A : Existence et unicité de la solution

On pose f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \mathrm{e}^{-x}$.

1. x est solution de (E) si et seulement si $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = x \iff \underline{f(x) = 0}$.
2. (a) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Sur l'intervalle $[0;1]$,
   - f est strictement croissante
   - f est continue, car dérivable
   - $f(0) = -1$ et $f(1) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,37 > 0$.

   D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [0;1]$
   (c) On remarque de plus que $f(1/2) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx -0,11 < 0$, donc $\underline{\alpha \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]}$.
   (d) Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\underline{f \text{ est négative sur } [0;\alpha]}$

partie B : Deuxième approche

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $g(x) = \dfrac{1+x}{1+\mathrm{e}^x}$

1. $g(x) = x \iff \dfrac{1+x-x(1+\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x} = 0 \iff \dfrac{1-x\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$
   La fraction est nulle si et seulement si le numérateur est nul et le dénominateur non nul, soit si et seulement si
   $$1 - x\mathrm{e}^x = 0 \iff \mathrm{e}^{-x} - x = 0 \iff \underline{f(x) = 0}$$
2. Ainsi, comme α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que α est l'unique solution de $g(x) = x$ sur $[0\,;\,1]$.
3. g est définie et dérivable sur $[0\,;\,1]$ car le dénominateur ne s'annule pas et que les deux membres de la fraction sont bien définis et dérivables, donc pour tout $x \in [0\,;\,1]$,
   $g'(x) = \dfrac{(1+\mathrm{e}^x) - (1+x)\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{1-x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$.
   $1 - x\mathrm{e}^x = 0 \iff x = \alpha$ et $g'(0) = 1/4 > 0$, donc

x	0		α		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	α	$\searrow$	

partie C : Approximation de la solution

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= g(u_n) \end{cases}.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n : 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$
   - **Initialisation :** $u_1 = g(u_0) = \dfrac{1}{2}$ et donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$, donc $\underline{\mathcal{P}_0 \text{ est vraie}}$.
   - **Hérédité :** Supposons qu'il existe un k entier tel que $\mathcal{P}_k$ est vraie.
     Comme g est croissante sur $[0\,;\,\alpha]$, on peut affirmer que
     $$\begin{aligned} &0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant \alpha \\ &g(0) \leqslant g(u_k) \leqslant g(u_{k+1}) \leqslant g(\alpha) \\ &\frac{1}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \alpha \end{aligned}$$
     Et donc $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \alpha$
     Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.
   - **Conclusion :** La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Donc la suite (u_n) est croissante et majorée par α, donc, par le théorème de convergence monotone, elle converge.
3. g est continue sur $\mathbb{R}$, et d'après la relation de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = u_{n+1}$, comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \ell$, on a la relation $g(\ell) = \ell$ donc ℓ est un point fixe de g et donc $\ell = \alpha$.
4. On remarque que à partir de u_3, la valeur se stabilise à $0,567143$. La convergence est extrêmement rapide (sûrement quadratique, c'est à dire que l'on gagne 2 décimales à chaque itération).