

Questions de cours

Séries générales

Vous devez connaître l'énoncé et la démonstration des propriétés suivantes :

- Relation fonctionnelle : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
- Pour tous a et b strictement positifs, $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.
- $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- Soit f une fonction croissante d'un intervalle I dans I , et (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors (u_n) est monotone.
- L'implication $(P \implies Q)$ est équivalente à sa contraposée $(\neg Q \implies \neg P)$ (démo avec tables de vérité ou avec définition).

Séries technopro

Vous devez savoir démontrer les propriétés suivantes :

1. Si (u_n) est définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,2u_n + 0,6$, démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$
2. Si (u_n) est définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,2u_n + 0,6$, démontrer par récurrence que (u_n) est croissante.

Exercices

Calcul

Calculer une dérivée Formules usuelles de dérivation, uv , $\frac{u}{v}$, $\frac{1}{u}$, \sqrt{u} , u^n , e^u , $\ln u$, $\sin(u)$, $\cos(u)$. Toutes fonctions usuelles permises

Chapitre 6 : Fonctions usuelles - chapitre complet

Relations fonctionnelles - Étude de fonction avec \exp , \ln et fonctions trigonométriques, limites, croissances comparées, (in)équations avec exponentielle, avec \ln avec recherche du domaine de définition. $x^y = e^{y \ln x}$.

Fonctions trigonométriques

Limites en 0 de $\frac{e^x - 1}{x}$, $\frac{\ln(x+1)}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x - 1}{x}$ **plutôt pour les généraux.**

Chapitre 7 : Raisonnement par récurrence

Principe de récurrence, premières applications aux suites : bornitude et variations.

Pour les généraux : calculs de sommes, en utilisant les formules $\sum_{k=0}^n k$, $\sum_{k=0}^n k^2$ et $\sum_{k=0}^n k^3$.

Chapitre 14 : Logique et raisonnement — Uniquement généraux

Assertions, négation, conjonction, disjonction, tables de vérité.

Programme prévisionnel

fonctions usuelles : \exp , \ln , trigo .
Démonstration par récurrence.

Chapitre 6 Fonctions usuelles

1 Fonction exponentielle

1.1 Définition

Définition par problème de Cauchy. premières propriétés démontrées : \exp ne s'annule pas, \exp est l'unique solution du problème $f' = f$ et $f(0) = 1$, \exp est positive et croissante sur \mathbb{R} .

1.2 Relation fonctionnelle

Notation e^x . Équations et inéquations.

1.3 Limites

Limites en $+\infty$ (démontrée). Croissance comparée $\exp/\text{polynôme}$.

Pour les généraux : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ et approximation affine.

2 Fonction Logarithme Népérien

2.1 Définition

Théorème de la bijection appliqué à la fonction \exp . - relation fonctionnelle et relations induites. $x^y = e^{y \ln x}$.

2.2 Variations et limites

Dérivée de \ln , limites en $+\infty$ et en 0, croissances comparées $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$ et $x \ln x$ en 0.
Dérivée de $\ln u$.

3 Fonctions trigonométriques

3.1 Fonction sinus

Impaire, 2π -périodique, dérivée, limite $\frac{\sin x}{x}$ en 0.

3.2 Fonction cosinus

Paire, 2π -périodique, dérivée, limite $\frac{\cos x - 1}{x}$ en 0.

3.3 Fonction tangente

Ens de déf, impaire, π -périodique, dérivée $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Chapitre 7 Raisonnement par récurrence

Principe de récurrence. Formules $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
Applications pour les suites : suite minorée, majorée, bornée. Variations.