Exercice 1

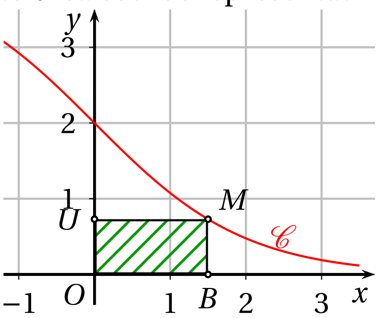
Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. Étudier les variations de g.
2. Justifier rapidement que si $x < 0$, alors $g(x) > 1$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une seule solution α sur l'intervalle $[1\,;2]$. Justifier rapidement que l'équation n'a pas d'autre solution sur $\mathbb{R}$.
   Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
4. Démontrer que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Étudier le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4}{e^x + 1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'origine O.



Soit M un point de $\mathscr{C}$ et les projetés B et U de M, respectivement sur l'axe des abscisses et des ordonnées.

1. Soit $\mathscr{A}$ la fonction qui, à tout $x \in \mathbb{R}^+$, associe l'aire du rectangle $BOUM$.
   (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\mathscr{A}(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$.
   (b) Démontrer que $\mathscr{A}'(x)$ est du signe de $g(x)$.
   (c) En déduire les variations de $\mathscr{A}$.
2. Montrer que l'aire du rectangle $BOUM$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
   Déterminer un encadrement de cette aire maximale déduit de celui de α obtenu à la question 3 partie I.
3. Démontrer que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α est parallèle à la droite (BU).

Exercice 2 : d'après BAC S

Le but de cet exercice est de montrer que l'équation :

$$\text{(E)} \quad \mathrm{e}^x = \frac{1}{x}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et de construire une suite qui converge vers elle.

Partie A : Existence et unicité de la solution

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Démonter que x est solution de l'équation (E) si, et seulement si, $f(x) = 0$.
2. (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) Étudier le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la note α.
   (d) Démontrer que $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.
   (e) Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

Partie B : Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$g(x) = \frac{1+x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

1. Démontrer l'équivalence :
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x.$$
2. En déduire que α est l'unique solution de $g(x) = x$.
3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

Partie C : Approximation de α

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= g(u_n) \end{cases}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.$$
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
   Justifier que $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α arrondie à la sixième décimale.