Correction du DM n°9 CPES

$\boxed{\text{Fonction ch et sh}}$

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Exercice 1

1°) Soit x un réel. $ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = ch(x)$

$$sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = \frac{-(e^{x} - e^{-x})}{2} = -sh(x)$$

Ainsi, la fonction ch est paire et sh est impaire.

2°) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$ch^2(x) - sh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}}}{4} - \frac{\cancel{e^{2x}} - 2 + \cancel{e^{-2x}}}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ ch^2 x - sh^2(x) = 1$

3°) Limites

Tout d'abord, $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ } d'après le théorème de composition des limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

De même $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$

On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} ch(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} sh(x) = +\infty$

Par symétrie par rapport à l'axe (Oy) (parité), $\lim\limits_{x \to -\infty} ch(x) = +\infty$

par rapport à l'origine (imparité), $\lim\limits_{x \to -\infty} sh(x) = -\infty$

4°) $\operatorname{ch}(x) - \frac{1}{2}e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{1}{2}e^x = \frac{e^{-x}}{2}$

$\operatorname{sh}(x) - \frac{1}{2}e^x = -\frac{e^{-x}}{2}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{2} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch}(x) - \frac{1}{2}e^x = 0}$

et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh}(x) - \frac{1}{2}e^x = 0}$

On peut en déduire que la courbe d'équation $y = \frac{1}{2}e^x$ est asymptote des courbes de fonctions ch et sh en $+\infty$

On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) - \frac{1}{2}e^x > 0$

$\operatorname{sh}(x) - \frac{1}{2}e^x < 0$

Ainsi la courbe de ch est au-dessus de l'asymptote et celle de sh au-dessous

5°) ch et sh sont derivables sur $\mathbb{R}$,

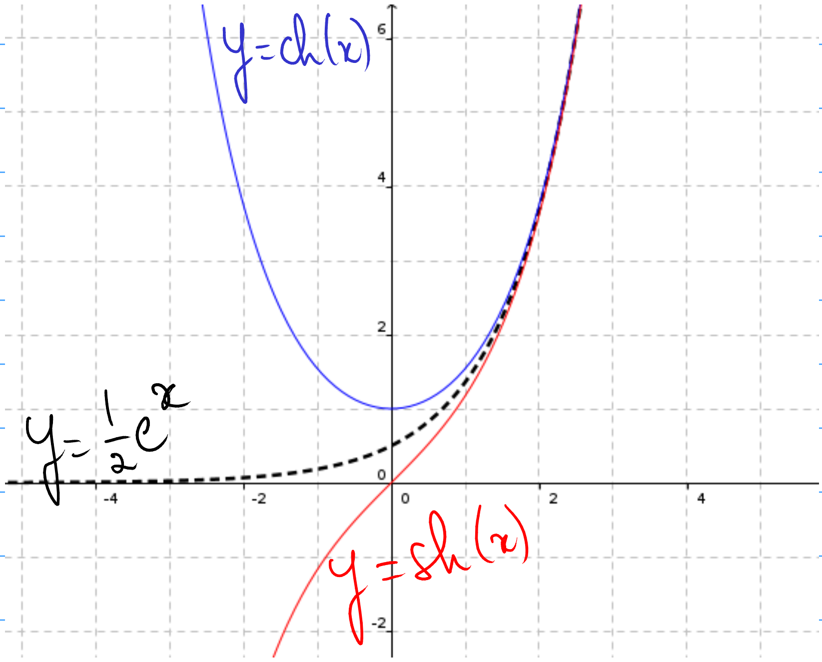
$\forall x \in \mathbb{R}$ $\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh}'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$ et $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$

6°)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de sh	$-$	0	$+$
Variations ch	↘	1	↗

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de ch		$+$	
Variations sh	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$



Exercice 2

$$\mathrm{ch}(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2}$$

$$\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) = \frac{e^{a}+e^{-a}}{2} \times \frac{e^{b}+e^{-b}}{2} = \frac{e^{a+b} + e^{b-a} + e^{a-b} + e^{-a-b}}{4}$$

$$\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) = \frac{e^{a}-e^{-a}}{2} \times \frac{e^{b}-e^{-b}}{2} = \frac{e^{a+b} - e^{b-a} - e^{a-b} + e^{-a-b}}{4}$$

Ainsi $\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) = \mathrm{ch}(a+b)$

$$\mathrm{sh}(a+b) = \frac{e^{a+b} - e^{-(a+b)}}{2}$$

$$\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) = \frac{e^{a}-e^{-a}}{2} \times \frac{e^{b}+e^{-b}}{2} = \frac{e^{a+b} - e^{b-a} + e^{a-b} - e^{-a-b}}{4}$$

$$\mathrm{sh}(b)\,\mathrm{ch}(a) = \frac{e^{b}-e^{-b}}{2} \times \frac{e^{a}+e^{-a}}{2} = \frac{e^{a+b} - e^{a-b} + e^{b-a} - e^{-a-b}}{4}$$

On a bien $\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(b)\,\mathrm{ch}(a) = \mathrm{sh}(a+b)$

3°) $\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}(a+(-b))$

$= \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(-b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(-b)$

$= \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$ par parité / imparité

$\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}(a+(-b))$

$= \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}((-b)) + \mathrm{sh}((-b))\,\mathrm{ch}(a)$

$= \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}\,b - \mathrm{sh}(b)\,\mathrm{ch}(a)$