

## Questions de cours

### Séries générales

Vous devez connaître l'énoncé et la démonstration des propriétés suivantes :

On définit le problème (\*) par  $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$

- Relation fonctionnelle :  $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .
- Pour tous  $a$  et  $b$  strictement positifs,  $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ .
- $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

### Séries techno/pro

Vous devez savoir démontrer les propriétés suivantes :

1. Si  $(u_n)$  est définie par  $u_0 = -1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 0, 2u_n + 0, 6$ , démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq 1$
2. Si  $(u_n)$  est définie par  $u_0 = -1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 0, 2u_n + 0, 6$ , démontrer par récurrence que  $(u_n)$  est croissante.

## Exercices

### Calcul

**Calculer une dérivée** Formules usuelles de dérivation,  $uv$ ,  $\frac{u}{v}$ ,  $\frac{1}{u}$ ,  $\sqrt{u}$ ,  $u^n$ ,  $e^u$ ,  $\ln u$ ,  $\sin(u)$ ,  $\cos(u)$ . Toutes fonctions usuelles permises

### Chapitre 6 : Fonctions usuelles - chapitre complet

Relations fonctionnelles - Étude de fonction avec  $\exp$ ,  $\ln$  et fonctions trigonométriques, limites, croissances comparées, (in)équations avec exponentielle, avec  $\ln$  avec recherche du domaine de définition.  $x^y = e^{y \ln x}$ .

Fonctions trigonométriques

Limites en 0 de  $\frac{e^x - 1}{x}$ ,  $\frac{\ln(x+1)}{x}$ ,  $\frac{\sin x}{x}$ ,  $\frac{\cos x - 1}{x}$  **plutôt pour les généraux.**

### Chapitre 7 : Raisonement par récurrence

Principe de récurrence, premières applications aux suites : bornitude et variations.

**Pour les généraux** : calculs de sommes, en utilisant les formules  $\sum_{k=0}^n k$ ,  $\sum_{k=0}^n k^2$  et  $\sum_{k=0}^n k^3$ .

### Chapitre 14 : Logique et raisonnement

Assertions, négation, conjonction, disjonction, tables de vérité.

## Programme prévisionnel

fonctions usuelles :  $\exp$ ,  $\ln$ , trigo.

Démonstration par récurrence.

# Chapitre 6 Fonctions usuelles

## 1 Fonction exponentielle

### 1.1 Définition

Définition par problème de Cauchy. premières propriétés démontrées :  $\exp$  ne s'annule pas,  $\exp$  est l'unique solution du problème  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ ,  $\exp$  est positive et croissante sur  $\mathbb{R}$ .

### 1.2 Relation fonctionnelle

Notation  $e^x$ . Équations et inéquations.

### 1.3 Limites

Limites en  $+\infty$  (démontrée). Croissance comparée  $\exp$ /polynôme.

Pour les généraux :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$  et approximation affine.

## 2 Fonction Logarithme Népérien

### 2.1 Définition

Théorème de la bijection appliqué à la fonction  $\exp$ . - relation fonctionnelle et relations induites.  $x^y = e^{y \ln x}$ .

### 2.2 Variations et limites

Dérivée de  $\ln$ , limites en  $+\infty$  et en 0, croissances comparées  $\frac{\ln x}{x}$  en  $+\infty$  et  $x \ln x$  en 0.

Dérivée de  $\ln u$ .

## 3 Fonctions trigonométriques

### 3.1 Fonction sinus

Impaire,  $2\pi$ -périodique, dérivée, limite  $\frac{\sin x}{x}$  en 0.

### 3.2 Fonction cosinus

Paire,  $2\pi$ -périodique, dérivée, limite  $\frac{\cos x - 1}{x}$  en 0.

### 3.3 Fonction tangente

Ens de déf, impaire,  $\pi$ -périodique, dérivée  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ .

# Chapitre 7 Raisonement par récurrence

Principe de récurrence. Formules  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  et  $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ .

Applications pour les suites : suite minorée, majorée, bornée. Variations.