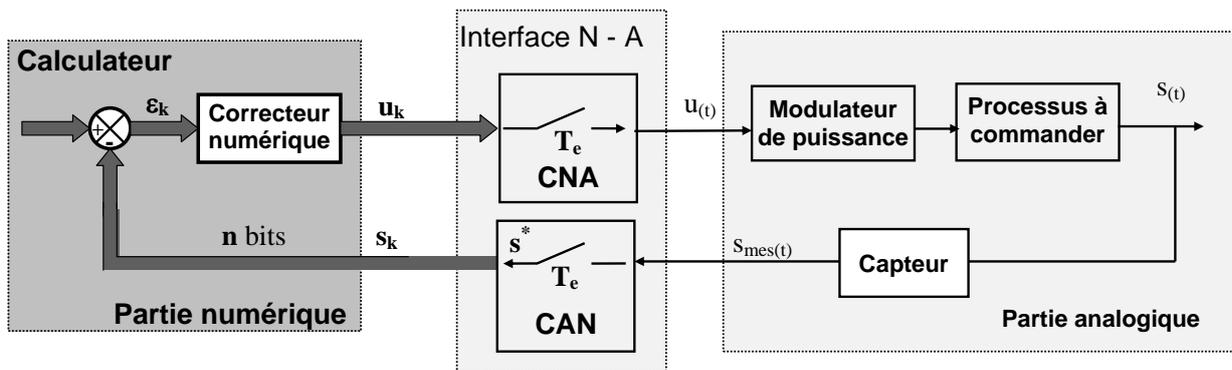


**DOCUMENT RESSOURCE :
ASSERVISSEMENTS NUMERIQUES**

1 INTRODUCTION

La commande des procédés a subi une évolution importante avec le développement des organes numériques programmés : **microprocesseurs** et **microcontrôleurs**. Le schéma fonctionnel de l'asservissement se résume alors à la configuration suivante :



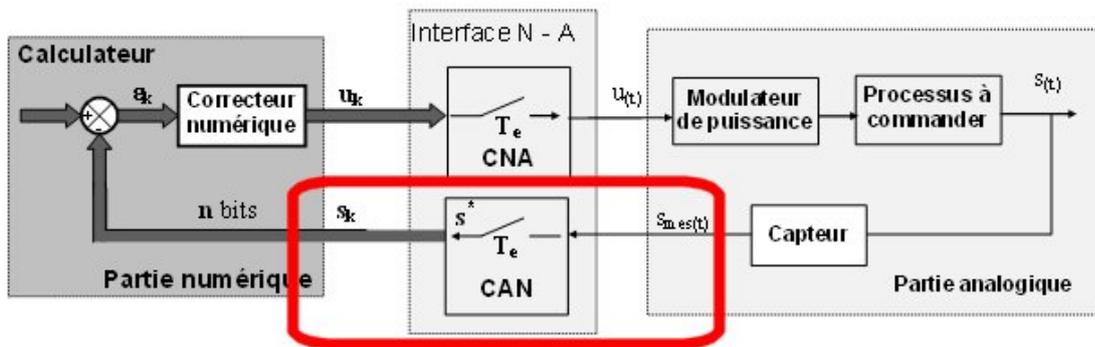
Exemples :

- 1- système Maxpid
- 2- Drone
- 3- Control X
- 4- Pelleteuse
- 5- système de commande de moteur à microcontrôleur

Cette évolution apporte sur le plan logiciel de nombreux avantages comme l'**utilisation d'algorithmes complexes de correction**, modifiables très facilement et la surveillance de défauts (dépassement d'erreur).

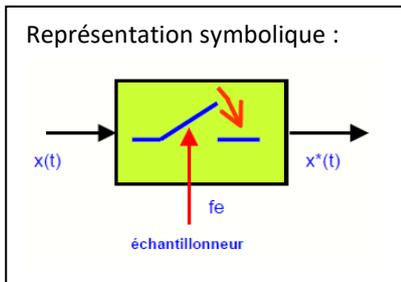
- **Le CAN** : Le **Convertisseur Analogique / Numérique** reçoit une grandeur physique (tension électrique) et fournit, périodiquement (période T_e), au calculateur une suite de nombres.
- **Le calculateur** effectue les opérations telles que le décalage, l'addition, la multiplication et la mémorisation : il élabore périodiquement, à chaque instant kT_e , un signal de commande u_k en fonction des valeurs aux instants précédents s_k et des valeurs de l'erreur ε_k . Il réalise donc la **correction numérique**.
- **Le CNA** : le **Convertisseur Numérique / Analogique** transforme la suite numérique en un signal analogique de commande du système. Il est suivi par un élément appelé **bloqueur** qui permet de maintenir le signal de commande constant entre deux instants d'échantillonnage.

1.1 La conversion Analogique / Numérique



1.2 L'échantillonnage

Pour échantillonner un signal analogique continu $x(t)$ et le transformer en une suite discrète d'échantillons $x^*(t)$, on prélève périodiquement à des intervalles de temps T_e la valeur du signal à l'aide d'un échantillonneur :

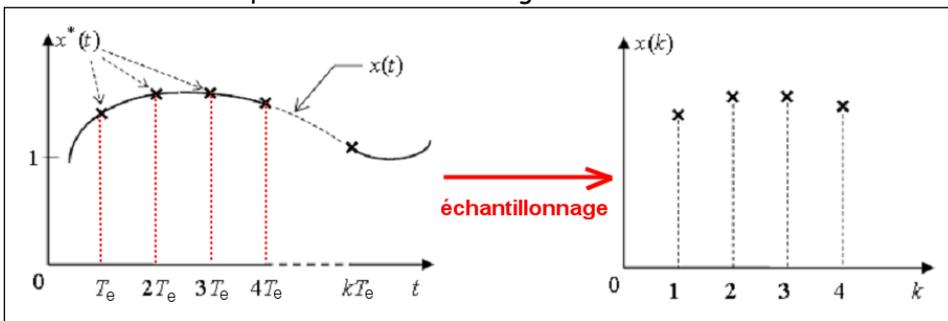


Mathématiquement, c'est l'opération qui, à un signal à temps continu, fait correspondre la suite discrète de valeurs que prend ce signal à des instants privilégiés t_k , $x(k) = x(t)|_{t=tk}$

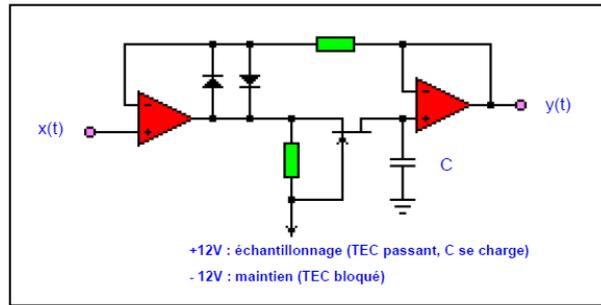
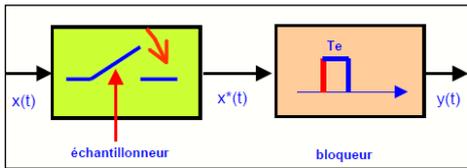
Echantillonnage à pas constant de période T_e :

$$t_k = kT_e, \quad x(k) = x(t)|_{t=tk} = x(kT_e)$$

$f_e = 1/T_e$ est la fréquence d'échantillonnage

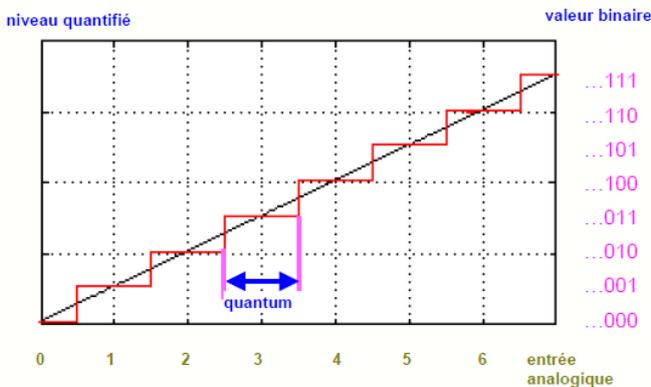
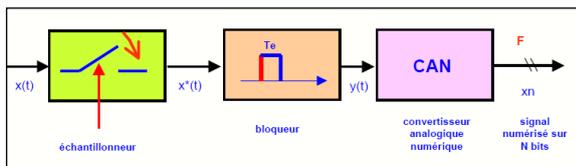


Pour permettre la conversion analogique-numérique entre deux instants d'échantillonnage, il faut maintenir la valeur du signal $x^*(t)$ à l'entrée du convertisseur jusqu'à l'arrivée de l'échantillon suivant : c'est le rôle du bloqueur :



1.3 La quantification

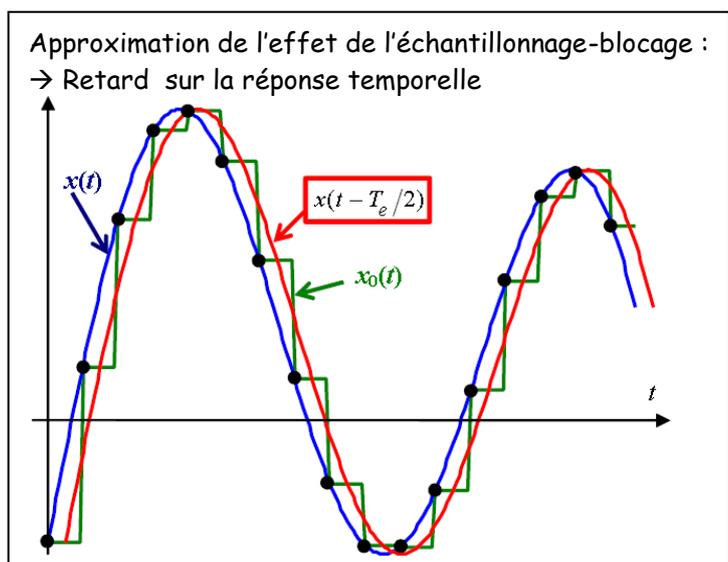
Le signal échantillonné et bloqué en marches d'escalier variant entre 0 et E (pleine échelle) ou -E/2 à +E/2 peut maintenant être converti en une suite de valeurs binaires :



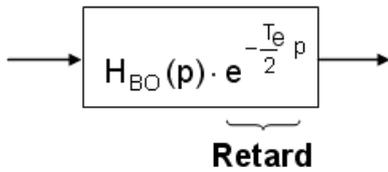
Le nombre de niveaux de quantification est lié au nombre de bits N du CAN : $q = E / N$

- un convertisseur 8 bits quantifie le signal analogique sur 256 niveaux : $q = 19,5 \text{ mV}$ si $E = 5V$
- un convertisseur 10 bits quantifie le signal analogique sur 1024 niveaux : $q = 4,9 \text{ mV}$ si $E = 5V$
- un convertisseur 16 bits quantifie le signal analogique sur 65536 niveaux : $q = 0,076 \text{ mV}$ si $E = 5V$

1.4 Incidence de l'échantillonnage sur la stabilité du système asservi



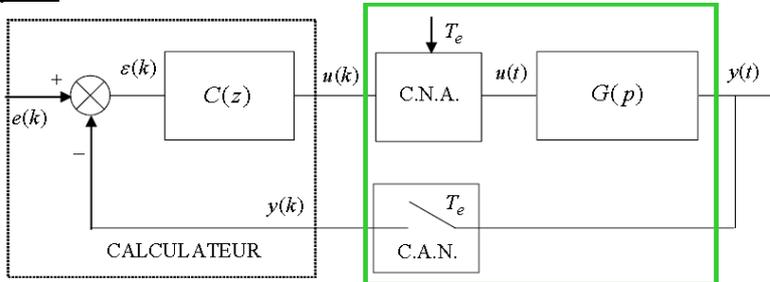
L'incidence du traitement numérique sur la stabilité peut être prise en compte en ajoutant un **retard pur** (égal à $T_e/2$) à la fonction de transfert globale en boucle ouverte.



Dans l'étude fréquentielle, le terme $e^{-j\frac{T_e}{2}\omega}$ agit uniquement sur la courbe de phase car

$$\left\| e^{-j\frac{T_e}{2}\omega} \right\| = 1 \quad \text{et} \quad \text{Arg} \left[e^{-j\frac{T_e}{2}\omega} \right] = -\frac{T_e}{2}\omega \quad (\Rightarrow \text{réduit } M\phi).$$

Exemple :

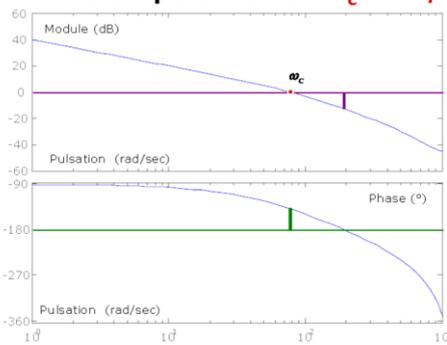


avec:

$$G(p) = \frac{100}{p(1 + \frac{p}{100})(1 + \frac{p}{1000})}$$

$$C(z) = 1 \quad \text{et} \quad T_e = 3 \text{ ms}$$

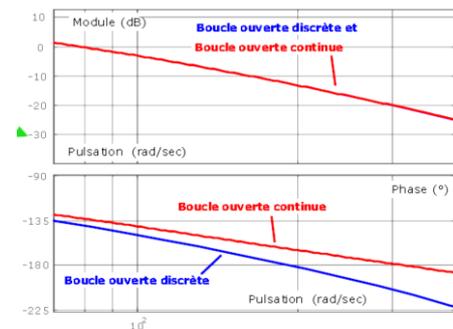
Diagramme de Bode en boucle ouverte - Pulsation de coupure à 0 dB : $\omega_c = 78,4 \text{ rad/s}$



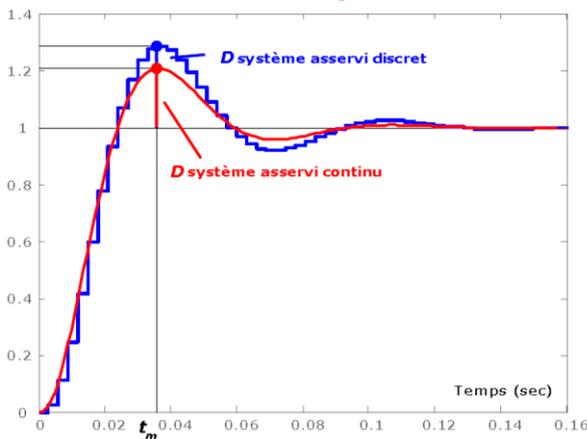
Marge de phase
 $\Delta\phi = 40,7^\circ$

Marge de gain
 $\Delta G = 12,6 \text{ dB}$

Chute de phase de $6,7^\circ$ à la pulsation de coupure



Allure de la réponse indicielle en boucle fermée



Dépassement
 $D(\%) = 28,5\%$

➡ À comparer à 20,6% dans le cas continu

Temps du premier maximum
 $t_m = 36 \text{ ms}$

➡ Identique pour les deux systèmes

➔ Un système échantillonné est moins stable que le système continu qui réalise la même fonction.

1.5 Choix de la période d'échantillonnage

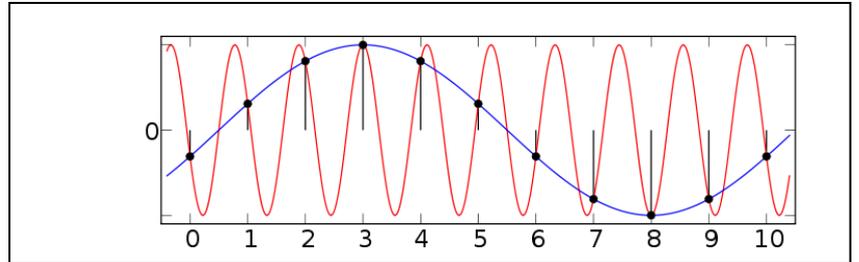
Théorème de Shannon :

Pour pouvoir échantillonner sans perte d'information un signal réel à temps continu, il suffit que la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ soit au moins égale au double de la fréquence maximale contenue dans le spectre de ce signal : $f_e > 2f_{max}$.

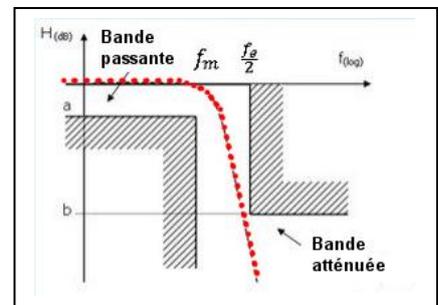
En pratique la règle adoptée par les automaticiens, consiste à évaluer la Bande Passante souhaitée du système et choisir : $6 f_{passante} < f_e < 25 f_{passante}$

1.6 Filtre anti-repliement

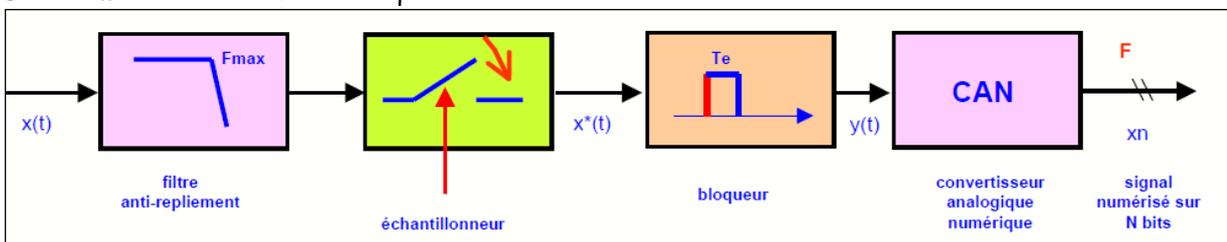
Les fréquences ne respectant pas le critère de Schannon introduisent des fréquences parasites dues au repliement de spectre. Dans l'exemple ci-contre $f_{max} < f_e < 2f_{max}$, sans filtre anti-repliement il apparaît une fréquence $(f_e - f_{max})$



Pour éviter ce phénomène, un filtre anti-repliement est systématiquement implanté en amont du convertisseur A/N pour couper les fréquences ne respectant pas le critère de Shannon (voir le gabarit ci-contre) :



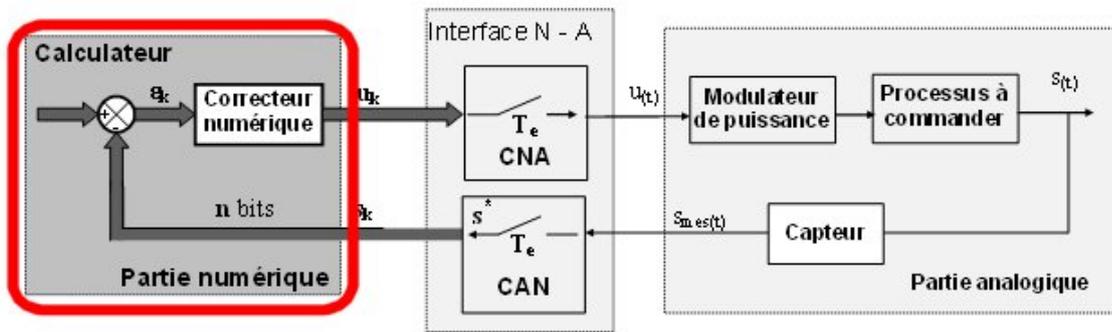
D'où le modèle de la chaîne d'acquisition :



1.7 Exemples de solutions d'acquisition (au laboratoire de SI)

Matériel	Carte USB NI6008	Carte USB NI 6211	Carte à microcontrôleur Arduino UNO
Fréquence D'échantillonnage	10 k.éch/s	250 k.éch/s	62,5 kHz ou plus : utilisation du timer d'interruption
résolution	12 bits 2048 valeurs sur +-10V	16 bits 65536 valeurs sur +-10V	10 bits 1024 valeurs sur 0-5V

2 LE CALCULATEUR : TRAITEMENT NUMERIQUE



Objectif : réaliser numériquement les traitements nécessaires aux correcteurs des boucles d'asservissement

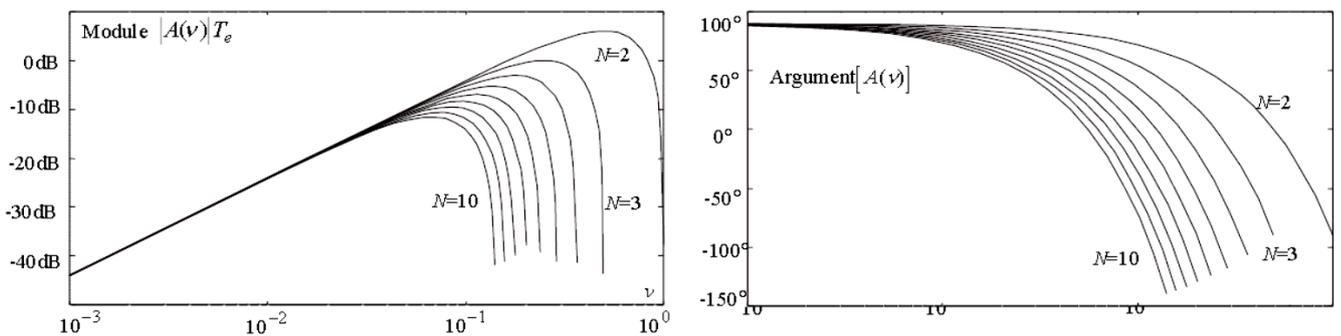
2.1 Dérivation

- Approximation aux différences finies pour la dérivée :

$$s(n) = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=nT_e} \approx \frac{y(n) - y(n-1)}{T_e}$$

Cette équation est dite 'équation aux différences non récurrente'

Remarque : l'opération de dérivation peut être approchée par des algorithmes plus généraux



$$s(n) = \frac{e(nT_e) - e[(n-1)T_e]}{T_e}$$

$$s(n) = \frac{e(nT_e) - e[(n-2)T_e]}{2T_e}$$

$$s(n) = \frac{2e(nT_e) + e[(n-1)T_e] - e[(n-3)T_e] - 2e[(n-4)T_e]}{10T_e}$$

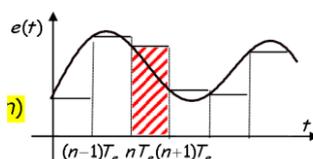
$$s(n) = \frac{de}{dt}(nT_e) \approx \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (N-1-2i)e[(n-i)T_e]}{(N-1)N(N+1)T_e} \cdot 6$$

2.2 Intégration

- Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles :

$$s(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau$$

$$s(n) = s(n-1) + T_e \cdot e(n)$$

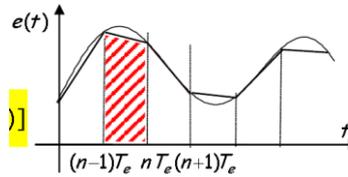


Cette équation aux différences est dite 'récursive', car elle fait intervenir pour le calcul de la sortie $s(n)$ une combinaison linéaire des entrées aux instants précédents et présent et des sorties aux instants précédents.

- Approximation d'une intégrale par la méthode des trapèzes :

$$s(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau$$

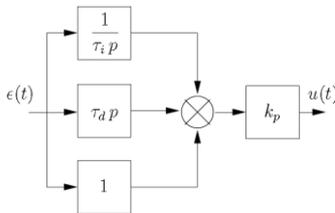
$$s(n) = s(n-1) + \frac{T_e}{2} \cdot (e(n) + e(n+1))$$



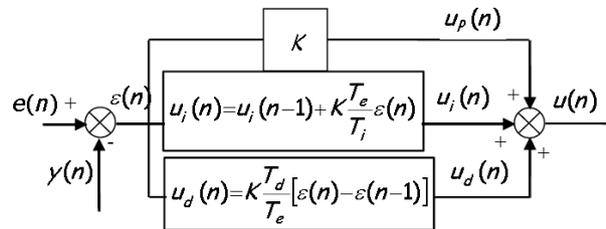
2.3 Réalisation de l'algorithme de commande

Exemple du correcteur PID :

Fonction de transfert du correcteur analogique

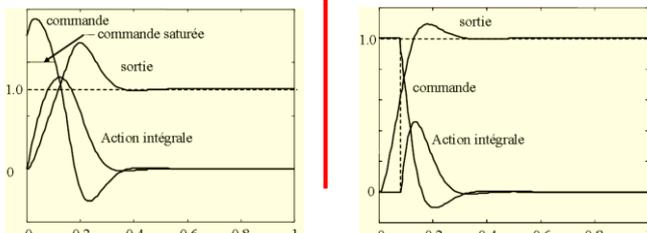


Algorithme correspondant :



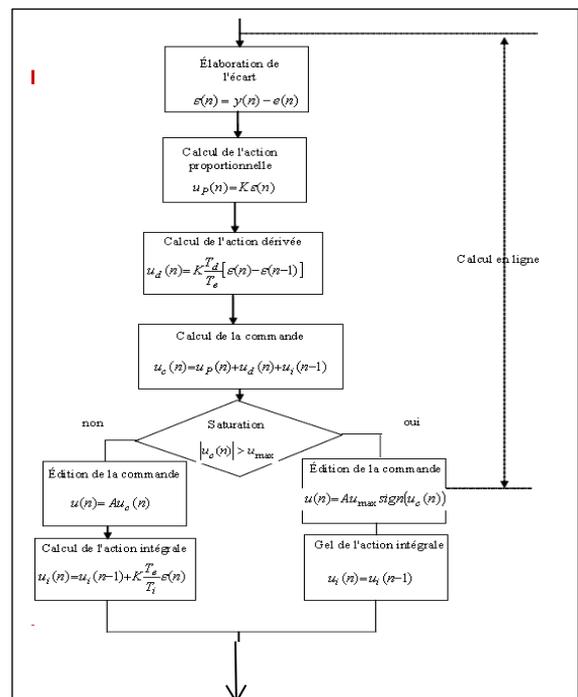
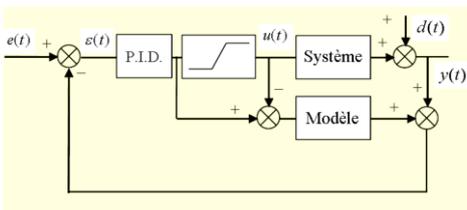
2.4 Nécessité et méthode de saturation de l'action intégrale

Non-linéarité qui ralentit la réponse :

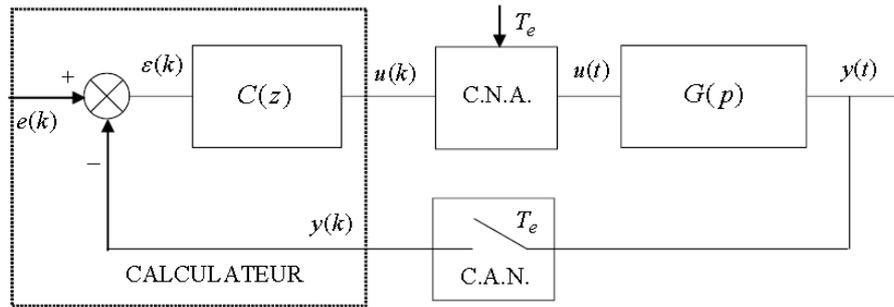


Il est possible avec l'algorithme numérique de minimiser ce phénomène en « gelant » l'action intégrale :

Si $u(n) > u_{max}$ alors $u_i(n) = u_i(n-1)$



2.5 Exemple de mise en place d'un algorithme de commande



Avec $G(p) = \frac{100}{p(1+\frac{p}{100})(1+\frac{p}{1000})}$ et $T_e = 0,5ms$. On vérifie $f_e = 2KHz \gg f_{-3dB} = \frac{100}{2\pi}$

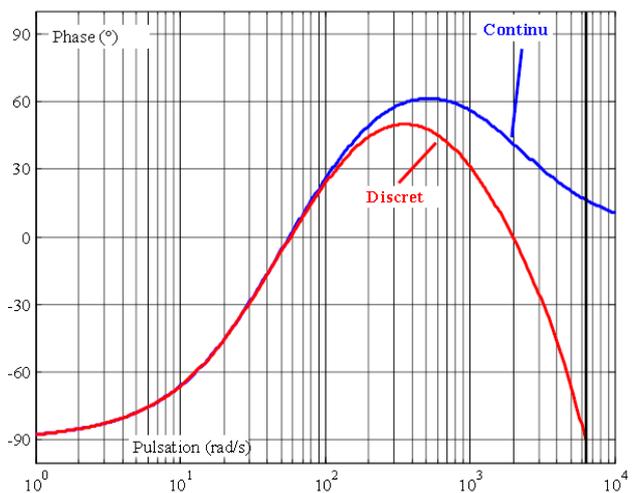
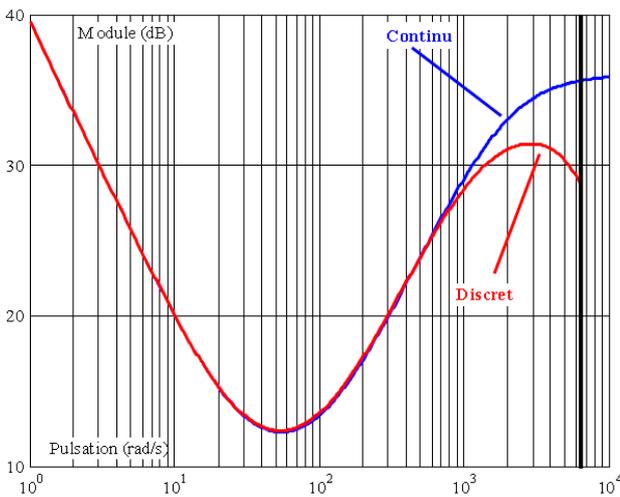
Le régulateur continu est synthétisé pour assurer en boucle fermée un dépassement de 10% pour un temps de premier maximum de 10ms.

$$C(p) = K(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1+T_f p}) \quad \text{avec } K = 4,1 \quad T_i = 0,043s \quad T_d = 0,0077s \quad T_f \approx T_d/15$$

Calcul des équations de récurrence en utilisant l'approximation des rectangles :

Comparaison des réponses fréquentielles du correcteur continu et du correcteur numérique :

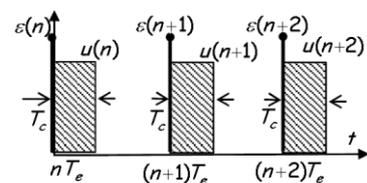
La réponse fréquentielle du PID numérique tient compte de l'ensemble {échantillonneur + algorithme + bloqueur} :



L'algorithme de calcul de $u(n)$ nécessite un certain temps de calcul (qui peut être différent à chaque instant). Ce temps de calcul vient s'ajouter au retard pur apporté par les opérations d'échantillonnage et de blocage.

Le retard total équivalent peut donc être évalué par :

$$\frac{T_e}{2} \leq \tau \approx \frac{T_e}{2} + T_c \leq \frac{3T_e}{2}$$



Conséquence sur la modélisation :

→ schéma-bloc avec prise en compte des retards