

Correction DM 8 - CPES

Exercice 1

$$A(2;3) \quad B(5;1)$$

1°) $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -b \\ a \end{matrix}$ donc $(AB) = -2x - 3y = -13 \Leftrightarrow (AB) : 2x + 3y = 13$

2°) $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal à la droite (AB)

3°) $C(4;5)$

3°) a) $2 \times 4 + 3 \times 5 = 23 \neq 13$ donc $C(4,5) \notin (AB)$

3°) b) $\vec{m}$ est directeur de (d) et (d) passe par C : $(d) : 3x - 2y = 3 \times 4 - 2 \times 5 = 2$

3°) c) H a des coordonnées qui sont solution du système :

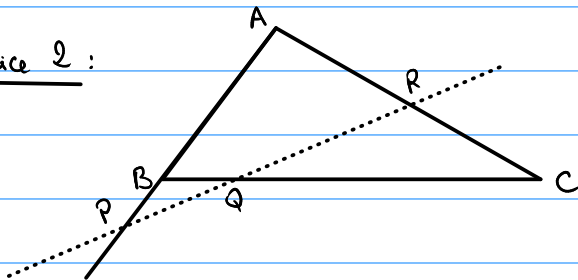
$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 13x = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 13 - \frac{64}{13} = \frac{105}{13} \\ x = \frac{32}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{35}{13} \\ x = \frac{32}{13} \end{cases}$$

$H\left(\frac{32}{13}, \frac{35}{13}\right)$

3°) d) $\vec{CH} \begin{pmatrix} \frac{32}{13} - 4 \\ \frac{35}{13} - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{20}{13} \\ -\frac{30}{13} \end{pmatrix} = -\frac{10}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \leftarrow \vec{n}$

$$\|\vec{CH}\| = \left| -\frac{10}{13} \right| \times \|\vec{n}\| = \frac{10}{13} \times \sqrt{2^2 + 3^2} = \frac{10}{13} \times \sqrt{13} = \frac{10}{\sqrt{13}}$$

Exercice 2 :



$$\begin{aligned} \vec{PA} &= \alpha \vec{PB} \\ \vec{QB} &= \beta \vec{QC} \\ \vec{RC} &= \gamma \vec{RA} \end{aligned} \quad \alpha, \beta, \gamma \neq 1$$

1°) $\vec{PA} = \alpha \vec{PB}$ donc P, A et B sont alignés $\Leftrightarrow P \in (AB)$

2°) Dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$

• $\vec{PA} = \alpha \vec{PB} \Leftrightarrow \vec{PA} = \alpha (\vec{PA} + \vec{AB}) = \alpha \vec{PA} + \alpha \vec{AB}$

$$\Leftrightarrow \vec{PA}(1 - \alpha) = \alpha \vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AP} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}; 0\right)$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \vec{QB} &= \beta \vec{QC} \Leftrightarrow \vec{QA} + \vec{AB} = \beta (\vec{QA} + \vec{AC}) \\
 &\Leftrightarrow \vec{QA} - \beta \vec{QA} = -\vec{AB} + \beta \vec{AC} \\
 &\Leftrightarrow \vec{AQ}(\beta - 1) = -\vec{AB} + \beta \vec{AC} \\
 &\Leftrightarrow \vec{AQ} = \frac{1}{1-\beta} \vec{AB} + \frac{\beta}{\beta-1} \vec{AC} \Leftrightarrow Q\left(-\frac{1}{\beta-1}; \frac{\beta}{\beta-1}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \vec{RC} &= \gamma \vec{RA} \Leftrightarrow \vec{RA} + \vec{AC} = \gamma \vec{RA} \\
 &\Leftrightarrow \vec{RA}(1-\gamma) = -\vec{AC} \\
 &\Leftrightarrow \vec{AR}(\gamma-1) = -\vec{AC} \\
 &\Leftrightarrow \vec{AR} = \frac{-1}{\gamma-1} \vec{AC} \Leftrightarrow R\left(0; -\frac{1}{\gamma-1}\right)
 \end{aligned}$$

3°) P, Q et R alignés $\Leftrightarrow \det(\vec{PQ}; \vec{PR}) = 0$ $\vec{PQ}\left(\frac{1}{1-\beta} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$ et $\vec{PR}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\gamma}\right)$

rapport, $\alpha, \beta, \gamma \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{1-\beta} + \frac{\alpha}{1-\alpha} & \frac{\alpha}{1-\alpha} \\ \frac{\beta}{\beta-1} & \frac{1}{1-\gamma} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1-\beta} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \frac{1}{1-\gamma} - \frac{\beta}{\beta-1} \times \frac{\alpha}{1-\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cancel{\alpha} + \cancel{\alpha} - \alpha\beta}{(1-\beta)(1-\alpha)(1-\gamma)} + \frac{\alpha\beta \times (1-\gamma)}{(1-\beta)(1-\alpha) \times (1-\gamma)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cancel{\alpha}\beta + \cancel{\alpha}\beta - \alpha\beta\gamma}{(1-\beta)(1-\alpha)(1-\gamma)} = 0 \Leftrightarrow 1 = \alpha\beta\gamma \quad \square$$