Feuille de TD n°6
Fonctions usuelles

1 Fonction exponentielle

1 Relation fonctionnelle :
Simplifier les écritures suivantes :

1. $e^6 \times e^{-4}$
2. $\dfrac{e^3}{e}$
3. $\left(e^{-4}\right)^3$
4. $\dfrac{3e^5}{e \times e^2}$
5. $\dfrac{e^{-4}}{e^{-1}}$
6. $\left(e^{-5}\right)^6$
7. $\dfrac{5e^{-7}}{e^2}$
8. $e^{-3x} \times e^{2x}$
9. $e^{2x-1} \times e^{-3x+2}$
10. $\dfrac{e^{5x}}{e^{-2x}}$
11. $\dfrac{e^{-3x^2+x+1}}{e^{x+1}}$
12. $e^{-5x} \times e^{5x+1}$
13. $e^{-3x} \times e^{-3x-1}$
14. $\dfrac{e^{-2x}}{e^{4x+2}}$
15. $\dfrac{e^{x^2-2x+1}}{e^{x^2+1}}$

2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + e^{-x}$.

1. Calculer $f(0)$
2. Montrer que f est paire.
3. Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de f.
4. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$.

3

1. Développer l'expression $\left(e^x + e^{-x}\right) \times \left(e^x - e^{-x}\right)$
2. Simplifier l'expression

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

4 Équations avec $\exp$**.**
Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{-4x+2} = 1$
2. $e^{-x+3} = e^{x+5}$
3. $\dfrac{e^{2x-2}}{e^{-x+1}} = 0$

5 Équations avec changement d'inconnue :
Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{2x} + e^x + 3 = 0$
2. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$
3. $-3e^{2x} - 9e^x + 12 = 0$

6 Inéquations :
Résoudre les inéquations suivantes :

1. $e^{x+1} > 1$
2. $e^{-2x+1} \leqslant e^x$
3. $e^{x^2+1} \geqslant e^{x-2}$
4. $\dfrac{x^2+x-2}{e^{2x}-1} > 0$

7 Calculs de dérivées :
Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la donnée de $f(x)$.
On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer une expression de $f'(x)$.

1. $f(x) = e^{-x}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$
3. $f(x) = e^{x^2+x}$
4. $f(x) = xe^{x+1}$
5. $f(x) = e^{x^2+1}$
6. $f(x) = \left(x^2+1\right)e^{3x+1}$
7. $f(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{e^x}$
8. $f(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{2x}}$
9. $f(x) = e^{4x+1}$
10. $f(x) = e^x + x^2 + 1$
11. $f(x) = 5e^x + 5xe^x$
12. $f(x) = e^x \sin x$
13. $f(x) = \dfrac{3x+1-e^x}{e^x}$
14. $f(x) = e^{-x} + x^{-1}$

8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x} + 3x - 2$

1. Étudier la fonction sur $\mathbb{R}$ (parité, variations, limites).
2. En déduire qu'il existe une unique solution à l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $]0\,;\,1[$.
3. Donner une approximation de cette solution à 10^{-3} près.

9 **<u>Partie 1.</u>**
Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x + x + 1$.

1. Étudier la fonction sur $\mathbb{R}$. Dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$, donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
3. En déduire le signe de φ sur $\mathbb{R}$

<u>Partie 2.</u>
On considère la fonction f définie sur $[-3\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$$

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 3$, $f'(x) = \dfrac{e^x\varphi(x)}{\left(e^x+1\right)^2}$
   En déduire le sens de variation de f sur $[-3\,;\,+\infty[$.
2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$. En déduire un encadrement de α à 10^{-2} près.
3. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Dresser son tableau de variation sur $[-3\,;\,+\infty[$.

2 Fonction logarithme népérien

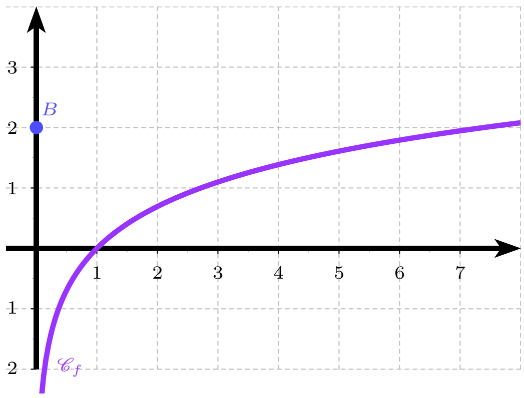
10 Calculer

1. $A = \frac{7}{16}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right) - 4\ln\left(\sqrt{2}+1\right) - \frac{25}{8}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$
2. $B = \ln\left(7+5\sqrt{2}\right) + 8\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + 7\ln\left(\sqrt{2}-1\right) + 2\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)$

11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$
2. $\ln\left(x^2+5x+6\right) = \ln(x+11)$
3. $\ln(-x-2) = \ln\left(\dfrac{-x-11}{x+3}\right)$
4. $\ln(x+2) = \ln(-x-11) - \ln(x+3)$
5. $\dfrac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x+1| = 0$
6. $\mathrm{e}^{2x-1} - \sqrt{\mathrm{e}^{2x+2}} - 2\mathrm{e}^3 = 0$
7. $(x^x)^x = x^{(x^x)}$
8. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

12 Dans le repère orthonormé suivant, on a le point $B\,(0\,;\,2)$ et $\mathscr{C}$, courbe représentative de la fonction $\ln$.



Existe-t-il une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point B ?

13 Résoudre les équations et inéquations.

1. $\ln x = -1$
2. $\mathrm{e}^{2x} = -1$
3. $\ln(4-2x) > 1$
4. $\mathrm{e}^{x+1} \geqslant 2$
5. $\ln(5x-1) = 2$
6. $\mathrm{e}^{-x} = 5$
7. $\ln(3x-1) < 0$
8. $\mathrm{e}^{5-x} \leqslant 2$

14 Même consigne, attention aux ensembles de définition

1. $\ln(x+1) = \ln(-x)$
2. $\ln(x^2-1) \leqslant \ln 5$
3. $\ln(x^2-x+1) = \ln 2$
4. $\ln(2x) > \ln(x^2-2x+1)$

15 Résoudre les équations/inéquations suivantes, attention au domaine de définition

1. $\ln(3x-6) = \ln(4-x)$
2. $\ln(2x) - \ln(x+1) = \ln(x-5)$
3. $\ln(2x-1) = 2\ln x$
4. $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(4-2x)$
5. $\ln(4x-2) + \ln(5) < 1 - \ln 2$
6. $\ln(5-x) \geqslant \ln(x-1)$
7. $\ln(x^2-4x+4) - \ln(x-2) < \ln(8-x)$
8. $\ln(2x+4) + \ln(1-x) - \ln 2 \geqslant \ln(-x)$

16 Résoudre les équations/inéquations suivantes après avoir déterminé leur ensemble de définition.

1. $\ln\left((x-3)(2x+1)\right) = \ln 4$
2. $\ln(x-3) + \ln(2x+1) = \ln 4$
3. $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln 3 + \ln 2$
4. $2\ln(x+2) = \ln(-x)$
5. $(\ln(x))^2 - \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{3}{4}$
6. $\ln(-2x+3) - \ln(x+1) = 1$

17 **calculs de dérivées** Calculer la dérivée de la fonction $f\colon x \mapsto 2^x$ et de la fonction $g\colon x \mapsto x^x$.

18 ** Soit la fonction f définie sur $]0\,;1[$ par $f(x) = x^x(1-x)^{1-x}$.
Montrer que f admet un maximum de $\dfrac{1}{2}$ sur l'intervalle de définition.

19 Donner la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. Soit un nombre $x > 0$.
   On a $\ln(1+x) - \ln(x) = \dots$
   (a) $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$;
   (b) $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$;
   (c) 0.
2. Pour tout nombre réel x, $\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}\right) - \ln\left(\mathrm{e}^{x-3}\right) = \dots$
   (a) $-3-\ln 2$;
   (b) $3-\ln 2$;
   (c) $-3+\ln 2$.
3. La suite définie par $u_n = \ln(5\times 3^n)$ est une suite
   (a) géométrique de raison $\ln 3$ et de premier terme $\ln 5$;
   (b) arithmétique de raison $\ln 3$ et de premier terme $\ln 5$;
   (c) arithmétique de raison $\ln 3$ et de premier terme 0.

20 **Déterminer un seuil :**

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{N}$:

1. $\left(\dfrac{5}{9}\right)^n \leqslant 0{,}01$
2. $3^{2n} > 10^8$

$\boxed{21}$ **Application :** Iwao souhaite placer son argent sur un compte épargne rémunéré à 3% par an.

1. Écrire un algorithme permettant de déterminer au bout de combien d'années de placement son capital initial aura doublé.
2. Retrouver le résultat de l'algorithme par le calcul.

$\boxed{22}$ **Série harmonique : un exemple de série divergente.**
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n non nul par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. (a) Écrire un algorithme permettant de calculer la valeur u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.
   (b) Utiliser cet algorithme programmé sur calculatrice ou ordinateur pour déterminer u_{20}, u_{100} et u_{500}.
   La suite semble-t-elle converger ?
2. (a) Démontrer que pour tout nombre $x > 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$
   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \ln(n+1)$
3. La suite (u_n) est-elle convergente ?

$\boxed{23}$ **Autour de la notion d'équivalent + taux intérêts**

1. On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = \ln(1+x) - x$$
   (a) Étudier le sens de variation de la fonction g. En déduire que, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $g(x) \leqslant 0$.
   (b) Démontrer que pour tout nombre réel $x \in [0\,;+\infty[$, $|g(x)| \leqslant \frac{x^2}{2}$.
   (c) En déduire que, pour tout nombre réel $x \in]0\,;0,14[$, on a
$$\ln(1+x) \approx x$$
   avec une erreur inférieure ou égale à $0{,}01$.
2. Un banquier explique la « règle des 70 » à un client : *« Si vous placez un capital sur un compte épargne dont le taux d'intérêt est $t\,\%$, alors votre capital aura doublé en $\frac{70}{t}$ ans. Par exemple, si vous placez votre argent à $7\,\%$, vous doublez le capital en 10 ans. »* .
   Justifier la règle de 70.
3. Énoncer la règle des 110 et des 231.

$\boxed{24}$ Résoudre l'inéquation suivante :
$$1 + \ln(x+3) > \ln\left(x^2 + 2x - 3\right)$$

$\boxed{25}$ Résoudre dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ le système :
$$(S)\left\{\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 50 \\ \ln x + \ln y = \ln 7 \end{array}\right.$$

$\boxed{26}$ <u>Base a</u>
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\log_2(2x) > 1 + \log_8(3x+2)$

$\boxed{27}$ Résoudre dans $\left(\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}\right)^2$ le système
$$\left\{\begin{array}{r} 4(\log_x(y) + \log_y(x)) = 17 \\ xy = 243 \end{array}\right.$$

$\boxed{28}$ Comparer 2024^{2025} et 2025^2024.

3 Fonctions trigonométriques

$\boxed{29}$ Étudier parité et périodicité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$
2. $f_2(x) = \sin x \cos x$
3. $f_3(x) = 1 + 5\cos^2 x$
4. $f_4(x) = 7\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$\boxed{30}$ Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 3\sin x + x^2 \cos x$
2. $f_2(x) = 2\cos x + x$
3. $f_3(x) = \dfrac{\sin x}{x}$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{\cos x}$
5. $f_5(x) = 5x\sin x$
6. $f_6(x) = \cos^4 x$
7. $f_7(x) = -3\cos(3x)$
8. $f_8(x) = \cos\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$
9. $f_9(x) = -\sin\left(-3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
10. $f_{10}(x) = \sin(2x) - \cos(3x)$
11. $f_{11}(x) = \cos\left(\sqrt{1+x^2}\right)$
12. $f_{12}(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$
13. $f_{13}(x) = 3\cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
14. $f_{14}(x) = \tan(2x)$
15. $f_{15}(x) = x\tan(x)$

4 Études de fonctions

31 Étudier la convexité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x) - 1}$.

32 La fonction f est définie par

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 + 4} - x\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans un repère orthonormé du plan admet le point $I\,(0\,;\,\ln 2)$ comme centre de symétrie.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations complet.
4. Étudier la convexité de f.

33

1. Étudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \ln|\ln x|$.
   On précisera l'ensemble de définition, l'étude des branches infinies, les coordonnées du point d'inflexion I et le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point.
2. *Application* : l'équation $\ln|\ln x| = m$ admet-elle deux solutions x_1 et x_2, quel que soit m ? Quand elles existent, montrer que leur produit est une constante que l'on déterminera.

34 On définit une application f de l'intervalle $[0\,;\,1]$ dans $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = x\sqrt{-\ln x}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Montrer que $\forall x \in]0\,;\,1]$, $-\ln x \geqslant 1 - x$, étudier à partir de là la dérivabilité de f en 1.
3. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

35

PARTIE I

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(t) = \frac{2t}{1+t} - \ln(1+t).$$

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que l'équation $g(t) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

PARTIE II

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1 + \mathrm{e}^{2x}\right).$$

1. Vérifier que $f'(x)$ possède le même signe que $g\left(\mathrm{e}^{2x}\right)$. En déduire le sens de variations de f.
   Montrer que le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

36 $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la famille des fonctions f_n définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n\,(1 - \ln x) & \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{C}_n$ la représentation graphique de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\right)$.

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue en 0.
   (b) Discuter, selon les valeurs de n la dérivabilité de f_n en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
   (c) Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
2. (a) Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de l'expression $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ et préciser les valeurs de x pour lesquelles elle s'annule.
   (b) En déduire les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_{n+1}$ et $\mathcal{C}_n$ et montrer que toutes les courbes passent par trois points fixes dont on précisera les coordonnées.
3. (a) Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer, en fonction de n une équation de la tangente à $\mathcal{C}_n$ aux points d'abscisses 1 et e.
   (c) Construire sur le même graphique les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

37

1. Soit φ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $\varphi(u) = u - (1+u)\ln(1+u)$.
   Montrer que pour tout $u > 0$, $\varphi(u) < 0$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln\left(1 + x^2\right)}{x^2} & \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

   Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier le sens de variation de f.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

38 Étudier les variations de la fonction f telle que $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x}\right)$.
Montrer que la courbe représentative de f, Γ admet un axe de symétrie et deux asymptotes obliques que l'on déterminera.

39

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\begin{cases} f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

   (a) Étudier la continuité de f en 0 et en 1.
   (b) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,;\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}\ :\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}.$$

(c) Étudier les variations de f et dresser le tableau de ces variations.

(d) Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormal.

2. À l'aide de la question précédente, représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormal l'ensemble des points $M\,(x\,;\,y)$ tels que $\ln|x|\times\ln|y|=1$

$\boxed{40}$ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la fonction g_n définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g_n(x)=x-n+\dfrac{n}{2}\ln x$.

1. Étudier les variations de g_n.
   Déterminer les limites de g_n en 0 et $+\infty$.
2. (a) En déduire l'existence d'un réel α_n unique tel que $g_n(\alpha_n)=0$.

   (b) Montrer que $1\leqslant\alpha_n\leqslant \mathrm{e}^2$.

   (c) Démontrer que $\ln(\alpha_n)=2-\dfrac{2}{n}\alpha_n$. Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et de n. En déduire que $\alpha_{n+1}-\alpha_n$.
3. (a) Montrer que la suite (α_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

   (b) En utilisant la question 2.c, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(\alpha_n)$ et en déduire ℓ.

$\boxed{41}$ Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

5 Avec des suites

$\boxed{42}$ Variations et limite de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

$\boxed{43}$

1. Montrer que pour tout réel $x\geqslant 0$, $x-\dfrac{x^2}{2}\leqslant\ln(x+1)\leqslant x$
2. En déduire la limite de la suite (u_n) de terme général :

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)\left(1+\frac{n}{n^2}\right).$$

$\boxed{44}$ Soit (u_n) la suite $u_n=\sqrt[n]{n}$.

1. Étudier la limite de la suite (u_n).
2. Déterminer le plus grand terme de la suite (u_n).

$\boxed{45}$

1. Démontrer que :

$$\forall x\in[1\,;\,+\infty[,\quad \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\geqslant-\frac{1}{x}$$

On pourra utiliser les variations d'une fonction.

2. Soit φ définie sur $I=[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$ par

$$\varphi(x)=(x+1)^2\ln x-x^2\ln(x+1).$$

   (a) Vérifier que la fonction φ est dérivable sur I et démontrer que $\forall x\in I$:

$$\varphi'(x)=2x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+2\ln x+\frac{(x+1)^3-x^3}{x(x+1)}$$

   (b) En déduire que φ est croissante sur I.

3. Pour quelles valeurs de $n\in\mathbb{N}$, a-t-on :

$$n^{(n+1)^2}\geqslant(n+1)^{n^2}$$

Feuille de TD n°6
Réponses ou Solutions

1 Fonction exponentielle

$\boxed{2}$

1. $f(0) = 1 + 1 = 2$
2. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-(-x)} = f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
4. En factorisant par e^{-x}.

$\boxed{3}$ $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}$, 1

$\boxed{4}$ $\dfrac{1}{2}$, -1, $\emptyset$.

$\boxed{5}$ $\emptyset$, $\{0\}$, $\{0\}$

$\boxed{6}$ $]-1\,;+\infty[$, $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right]$, $\mathbb{R}$, $]-2\,;0[\cup]1\,;+\infty[$

$\boxed{8}$ dérivée : $-3(\mathrm{e}^{-3x} - 1)$, s'annule en 0. TVI.

2 Fonction logarithme népérien

$\boxed{12}$ en e^3

$\boxed{13}$ $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $\emptyset$, $x < \dfrac{4-\mathrm{e}}{2}$, $x \geqslant \ln 2 - 1$, $\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{5}$, $\left]\dfrac{1}{3}\,;1\right[$, $x \geqslant 5 - \ln 2$

$\boxed{14}$ $-\dfrac{1}{2}$, $\left[-\sqrt{6}\,;-1\right[\cup\left]1\,;\sqrt{6}\right]$, $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\left]2-\sqrt{3}\,;1\right[\cup\left]1\,;2+\sqrt{3}\right[$

$\boxed{17}$ $\ln 2 2^x$, $(1 + \ln x)x^x$

$\boxed{19}$ a, b, b

$\boxed{20}$ 8, 9

$\boxed{21}$

```
c=1
n=0
while c<2 :
  c=c×1.03
  n=n+1
print n
```

$$1{,}03^n > 2 \iff n > \frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \geqslant 24$$

$\boxed{22}$ Croissance très lente de la suite, mais semble non bornée.

2. (a) Étude de fonction $f(x) = \ln(1+x) - x$
   $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x} < 0$ sur $]0\,;+\infty[$.
   Donc f décroissante sur $]0\,;+\infty[$ et $f(0) = 0$, donc $f < 0$ sur $]0\,;+\infty[$. D'où la conclusion.

   (b) En remplaçant x par $\dfrac{1}{n}$, on a $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$, on conclut grâce à la question précédente.

(c) En sommant entre 1 et N, on a :

$$u_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \ln n \geqslant \ln(N+1) - \ln 1$$

3. $u_n \geqslant ln(n+1)$ donc (u_n) diverge.

3 Fonctions trigonométriques

29

1. paire, $2\pi-$périodique
2. impaire, $\pi-$périodique
3. paire, $\pi-$périodique
4. impaire, $4\pi-$périodique

30

1. $3\cos x + 2x\cos x - x^2 \sin x$
2. $-2\sin x + 1$
3. $\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$
4. $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$
5. $5\sin x + 5x\cos x$
6. $-4\sin x \cos^3 x$
7. $9\sin(3x)$
8. $\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} \sin\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$
9. $3\cos\left(-3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
10. $2\cos(2x) + 3\sin(3x)$
11. $-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sin\sqrt{1+x^2}$
12. $\cos x e^{\sin x}$
13. $-15\sin\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
14. $2(1+\tan^2(2x))$
15. $x(1+\tan^2 x) + \tan x$

4 Études de fonctions

5 Avec des suites