

Correction DM 6 CPES

Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2(x+\pi)) + \sin(x+\pi) \cos(x+\pi) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2x+2\pi) + (-\sin(x) \times (-\cos(x))) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \sin x \cos x = f(x) \end{aligned}$$

Donc f est π -périodique.

Exercice 2

1°) $f: [-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$

1°) a) Soit $x \in [-2; 2]$

$$f(-x) = \sqrt{1 - \frac{(-x)^2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = f(x)$$

Donc f est paire.

1°) b) Comme $1 - \frac{x^2}{4} > 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 > 0$
 $4 - x^2$ a comme racines -2 et $+2$ et
 $a = -1 < 0$, donc $1 - \frac{x^2}{4} > 0 \Leftrightarrow x \in]-2; 2[$

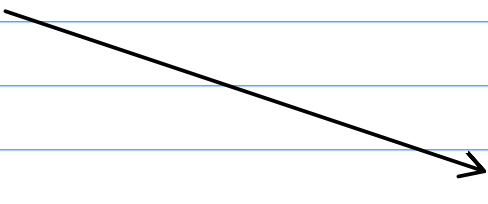
Ainsi, f est dérivable sur $] -2; 2 [$, à savoir

sur $[0; 2[$.

Par tout $x \in (0; 2[$, $f'(x) = \frac{-\frac{2x}{4}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}$
 $= -\frac{x}{4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}$

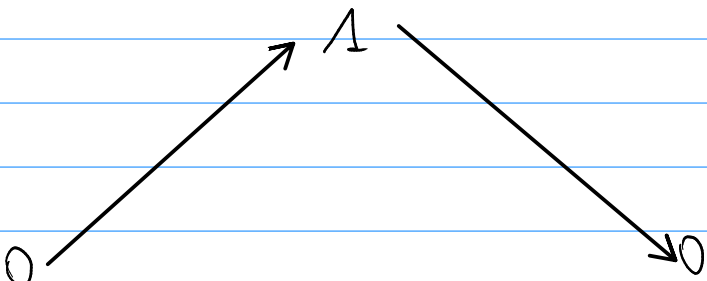
Ainsi, on a le tableau suivant sur $[0, 2]$

x	0	2
$f'(x)$	-	
Variations de f	1	0



Sur $[-2; 2]$, par symétrie par rapport à (Oy) :

x	-2	0	2
Variations de f	0	1	0



2°) a) $\forall x \in [0, 2]$

$$g(x) = 2x f(x)$$

$$= 2x \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = x \sqrt{4 - x^2}$$

b) Comme $4 - x^2 = 0$ si $x = \pm 2$

g n'est pas dérivable en 2.

On a alors, $\forall x \in [0, 2[$

$$g'(x) = \sqrt{4 - x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}}$$

$$= \frac{4 - x^2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2(2 - x^2)}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}$$

Ainsi, $g'(x) = \frac{2 - x^2}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}$

2c) $\forall x \in [0, 2[, \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} > 0$

de plus $2 - x^2$ s'annule en $\pm \sqrt{2}$

Ainsi

x	0	$\sqrt{2}$	2
$2 - x^2$	+	ϕ	-
$g'(x)$	+	ϕ	-
Variante de g	0	2	0

$$g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} f(\sqrt{2})$$

$$g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= 2$$

2-d) Sur $[0, \sqrt{2}]$

- * f continue car dérivable
- * f strictement croissante
- * $1 \in [f(0); f(\sqrt{2})]$

D'après le corollaire du TVI, il existe une solution unique $\alpha \in [0, \sqrt{2}]$ à l'équation $g(\alpha) = 1$

De même, il existe une unique solution à l'équation sur $[\sqrt{2}; 2]$: β

$$0,5 < \alpha < 0,6$$

$$1,9 < \beta < 2$$

$$0,51 < \alpha < 0,52$$

$$1,93 < \beta < 1,94$$