Chapitre 5 : Fonctions usuelles

1 Fonction exponentielle

1.1 Définition de « La fonction exponentielle »

Définition 1 (Fonction exponentielle).

La fonction *exponentielle*, notée exp est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et telle que $\exp(0) = 1$.

Remarque 1 (Unicité de la fonction).

On doit admettre d'existence d'une telle fonction (une justification est sa constructibilité grâce à la méthode d'Euler), mais on peut démontrer qu'elle est unique, en utilisant le fait que la fonction exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ Unicité de la fonction

Théorème 1 (Propriétés de la fonction).

- **Relation fonctionnelle** :$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- **Positivité** : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.
- **Monotonie** : la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- **Notation d'Euler** : On pose $\exp(x) = \mathrm{e}^x$, où $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2,71828\ldots$.

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \ : \ \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b \ ; \ \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a} \ ; \ \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} \ ; \ e^{na} = \left(\mathrm{e}^a\right)^n, \ n \in \mathbb{Z}$$

Démonstration

Relation fonctionnelle : Soit y un réel quelconque. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ (bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\exp(x) \times 1 \exp(x+y) - \exp(x)\exp(x+y)}{\exp(x)^2} = 0$. Ainsi, f est constante sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) = \exp(y)$.

Ainsi, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

$\square$

Remarque 2 (valeur de e).

Il peut être défini comme la limite de la suite (u_n) telle que $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, c'est la définition historique.
Mais la convergence de la suite est très lente (il faut calculer plusieurs milliers de termes de la suite pour obtenir quelques décimales exactes.
On a une valeur approchée plus rapidement en étudiant la suite (v_n) définie par $v_n = 1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$[a], qui converge également vers le nombre e.

[a] la factorielle de n est le nombre défini ainsi : $n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times n$.

■ **Exemple 1:**

- $\mathrm{e}^2 \times \mathrm{e} = \mathrm{e}^{2+1} = \mathrm{e}^3$
- $\mathrm{e}^{-4} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^4}$
- $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$
- $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+1}}{\mathrm{e}^{1-x}} = \mathrm{e}^{3x+1-(1-x)} = \mathrm{e}^{4x}$

Théorème 2 (Équations et inéquations).

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^a > \mathrm{e}^b \iff a > b$.

▶ Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{2x^2+3} = \mathrm{e}^{7x} \qquad \mathrm{e}^{3x} \leqslant \mathrm{e}^{x+6}$$

1.2 Limites

Propriété 1 (Limites de la fonction exponentielle).

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \ldots\ldots$

Démonstration

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - (x+1)$.
2. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
3. Quelle est la limite en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x$?

□

▶ Exercice 2 **Modèle de Verhulst**

Une population de bactéries se modélise au cours du temps par la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t)=\dfrac{150}{1+90\mathrm{e}^{-0,6t}}$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Propriété 2 (Limite et nombre dérivé).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$$

On interprète cela par l'approximation affine de exp : quand x est proche de 0, $\mathrm{e}^x\approx 1+x$.

<u>Démonstration</u>

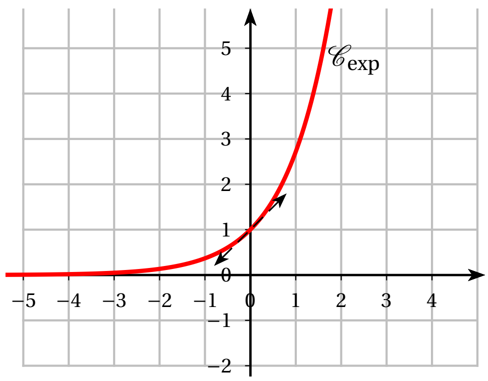
Nombre dérivé en 0

$\square$

1.3 Représentation graphique

La fonction exponentielle croît très vite.
$\mathrm{e}^1\approx 2,72$, $\mathrm{e}^2\approx 7,39$ et $\mathrm{e}^4\approx 54$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$



1.4 Théorème de croissances comparées

« L'exponentielle domine les fonctions puissance »

Théorème 3 (Croissances comparées).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(x)}{x}=+\infty \text{ et par conséquent, } \lim_{x\to-\infty}x\exp(x)=0$$

<u>Démonstration</u>

On étudie la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{x^2}{2}$.

$\square$

Remarque 3.

Les formules précédentes restent vraies si on remplace $\dfrac{\exp x}{x}$ par $\dfrac{\exp x}{x^n}$ et en 0 par $x^n\exp(x)$.

▶ Exercice 3

Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-3x} + 3x - 5$.

2 Fonction logarithme népérien

2.1 Définition

d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout nombre strictement positif, il existe un unique antécédent réel par la fonction exponentielle : pour tout $y \in]0;+\infty[$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x) = y$.

On remarque d'ailleurs que $\underline{y > 1 \iff x > 0}$.

Par exemple, $2 > 0$ admet un antécédent τ_2 qui sera positif et tel que $\exp(\tau_2) = 2$.

x	$-\infty$	0	τ_2	$\cdots$	$+\infty$
exp	0	1	2	e	$+\infty$

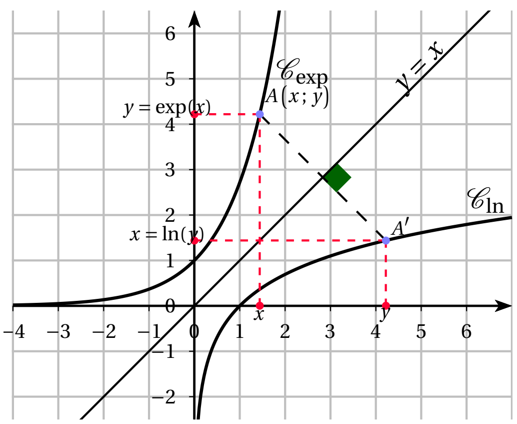
Définition 2 (Logarithme népérien)**.**

Si y est un nombre strictement positif, on appelle *logarithme népérien* de y le nombre réel noté $\ln(y)$ qui est l'antécédent de y par la fonction exponentielle :

$$\ln \ : \ y \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln(y) \in \mathbb{R} \quad \text{tel que } \exp(\ln(y)) = y$$

On dit que la fonction logarithme népérien est la fonction **réciproque** de la fonction exponentielle.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b > 0, \boxed{\mathrm{e}^a = b \iff a = \ln(b)}$$



Comme $y = \exp(x)$, alors $x = \ln(y)$, les courbes sont symétriques par rapport à l'axe d'équation $y = x$ (qui permet d'intervertir les rôles des axes des abscisses et des ordonnées).

On a les propriétés suivantes :

Propriété 3 (fonction réciproque de exp).

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$, ou $\ln\left(e^x\right) = x$
- Pour tout $x \in]0\,;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$, $\exp(\ln(x)) = x$, ou $e^{\ln(x)} = x$

En particulier,
$\ln(1) = \ln(e^0) = 0$ et $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$.

Théorème 4 (Propriétés de ln).

$\forall a, b \in]0\,;+\infty[$

- **Relation fonctionnelle :** $\boxed{\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)}$
- **Conséquences :**

1. $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
3. Pour tout entier <u>relatif</u> n,
$\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$
4. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$ et plus généralement, pour tout réel b, $\ln(a^b) = b\ln(a)$.

On retiendra du dernier point que toute puissance s'exprime à l'aide de l'exponentielle de base e et du logarithme népérien :

$$\boxed{x^y = \left(e^{\ln x}\right)^y = e^{y\ln(x)}}$$

■ Exemple 2:

- $\ln(10) = \ln(2) + \ln(5)$
- $\ln(100) = \ln(10) + \ln(10) = 2\ln(10)$
- $\ln(1000) = \ldots = 3\ln(10)$

▶ Exercice 4 — Prise d'initiatives

1. Comparer les nombres $a = 2^{2015}$ et $b = 3^{1271}$
2. Donner une valeur approchée du nombre $A = \dfrac{2^{2015}}{5^{867}}$

2.2 Dérivée et variations

Propriété 4 (Dérivée de la fonction ln).

Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction ln est dérivable et sa dérivée est la fonction inverse : pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

Remarque 4.

La fonction ln est par conséquent continue sur $]0;+\infty[$.

Conséquence 1.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Propriété 5 (Équations et inéquations).

- Pour tous $a, b > 0$, $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$
- Pour tous $a, b > 0$, $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$

▶ Exercice 5

Résoudre les inéquations suivantes après avoir trouvé leur ensemble de définition.

1. $\ln(2x-4) < 0$
2. $\ln(3x) \leqslant 1$
3. $\ln(-x+1) \geqslant \ln(x)$
4. $\ln(3-2x) < \ln(x-3)$

2.3 Limites, Croissances comparées, équivalent

Propriété 6 (Limites).

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

Propriété 7 (Croissances comparées).

- Forme $\dfrac{+\infty}{+\infty}$,
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0}$$
- Forme $0 \times -\infty$,
$$\boxed{\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0}$$

▶ Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{2x+1}$$

1. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
2. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

Propriété 8 (Une limite particulière).

On a $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

<u>Démonstration</u>

Le nombre dérivé de ln en 1 donne la limite attendue.

$\square$

Remarque 5 (Équivalent).

On dit que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est équivalente à x en 0.
Cela signifie que, pour un x « proche de 0, $\ln(1+x) \approx x$ ».
Par exemple, $\ln(1,01) \approx 0,009950331 \approx 0,01$

2.4 Étude des fonctions composées $\ln \circ u$

Propriété 9 (Dérivée de $\ln \circ u$).

Si u est une fonction définie sur un intervalle I, dérivable sur I et est strictement positive sur I, alors la fonction $f = \ln \circ u$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Conséquence 2.

- u et $ln(u)$ ont le même sens de variation sur I.
- (avec une fonction affine) $f \ : \ x \longmapsto \ln(ax+b)$ est dérivable sur $I = \{x \in \mathbb{R} \mid ax+b > 0\}$ et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{a}{ax+b}$.

Cette dernière remarque sera utilisée notamment pour la recherche de primitives de fractions rationnelles.

3 Fonctions trigonométriques

3.1 Fonction sinus

Définition 3 (Sinus d'un réel).

Soit x un nombre réel, $\sin x$ est l'ordonnée du point du cercle trigonométrique associé au nombre x.

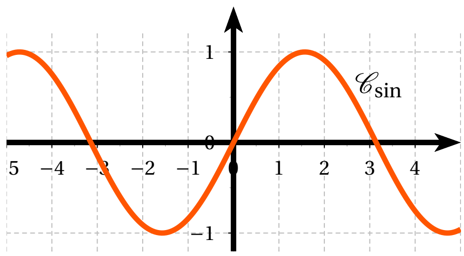
Définition 4 (Fonction sinus).

La fonction *sinus* est définie sur $\mathbb{R}$, par
$$\sin\colon x \longmapsto \sin x$$
Elle est 2π−périodique, impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa dérivée est $\boxed{\sin' = \cos}$.

Propriété 10 (Variations).

x	0		$\pi/2$		π
$\sin(x)$	0	↗	1	↘	0

Imparité et périodicité font le reste :



3.2 Fonction cosinus

Définition 5 (Cosinus d'un réel).

Soit x un nombre réel, $\cos x$ est l'abscisse du point du cercle trigonométrique associé au nombre x.

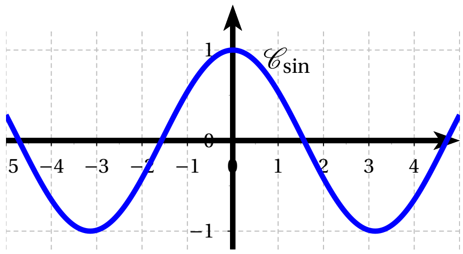
Définition 6 (Fonction sinus).

La fonction *cosinus* est définie sur $\mathbb{R}$, par
$$\cos\colon x \longmapsto \cos x$$
Elle est 2π−périodique, paire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa dérivée est $\boxed{\cos' = -\sin}$.

Propriété 11 (Variations).

x	0		$\pi/2$		π
$\cos(x)$	1	↘	0	↘	-1

Parité et périodicité font le reste :



3.3 Fonction Tangente

Définition 7 (tangente d'un réel).

Soit x un nombre réel différent de $\frac{\pi}{2}$ modulo π, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Définition 8 (Fonction tangente).

La fonction *tangente* est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, par

$$\cos : x \mapsto \cos x$$

Elle est π−périodique, impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Sa dérivée est $\boxed{\tan' : x \mapsto 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$.

Propriété 12 (Variations sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$).

La fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

x	0	$\pi/2$
$\tan(x)$	0 ↗	$+\infty$

Imparité et périodicité font le reste :