Chapitre 5 : Éléments de géométrie plane

Table des matières

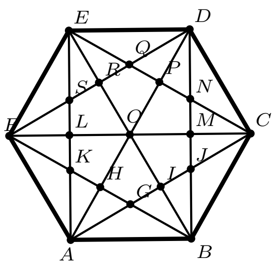
1 Vecteurs et Coordonnées

1.1 Colinéarité

Définition 1.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* s'il existe deux réels, non tous les deux nuls, α et β tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$.

■ **Exemple 1:**



- $\overrightarrow{LO}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ car $\overrightarrow{AB} = 2 \times \overrightarrow{LO} \iff 1\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{LO} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{FD}$ est colinéaire à $\overrightarrow{GI}$ car $\overrightarrow{GI} = \dfrac{1}{6} \times \overrightarrow{FD}$.
- $\overrightarrow{HI}$ est colinéaire à $\overrightarrow{FC}$ car $\overrightarrow{FC} = 4 \times \overrightarrow{HI}$.

Remarque 1 (Cas du vecteur nul).

$\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ puisque $\vec{0} = \vec{0} + 0 \times \vec{u}$.

1.2 Coordonnées

Définition 2 (Base de vecteurs)**.**

Lorsque deux vecteurs du plan ne sont pas colinéaires, on dit qu'ils forment une *base vectorielle* du plan. On dit que ces deux vecteurs sont *libres*.

Dans ce cas la seule combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnant le vecteur nul est : $0\vec{u} + 0\vec{v} = \vec{0}$

Propriété 1 (Et définition : coordonnées d'un vecteur)**.**

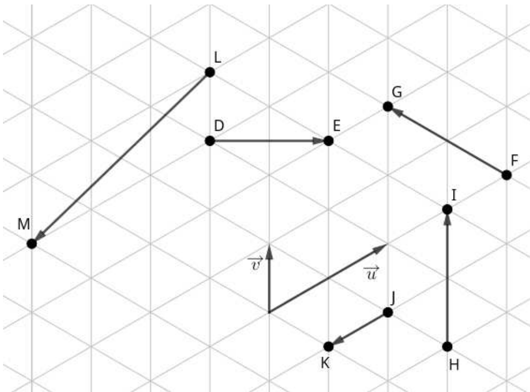
Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors quel que soit le vecteur $\vec{a}$, **il existe un couple unique** de réels $(x; y)$ tels que $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Alors on dit que le couple $(x\,;\,y)$ est le couple de *coordonnées du vecteur* $\vec{a}$ dans la *base* $(\vec{u}; \vec{v})$. On note $\vec{a}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (en colonne).

■ Exemple 2:

Dans la figure ci-contre, décomposer chaque vecteur proposé en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et en déduire ses coordonnées dans la base $(\vec{u}; \vec{v})$.

- $\overrightarrow{DE} = \vec{u} - \vec{v}$ donc $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{FG}$
- $\overrightarrow{HI}$
- $\overrightarrow{JK}$
- $\overrightarrow{LM}$



Propriété 2 (Et définition : déterminant)**.**

Dans une base $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ du plan, on donne deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de coordonnées $\vec{a}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Le nombre $xy' - yx'$ est appelé *déterminant* de $\vec{a}$ et $\vec{b}$, et se note entre barres : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$

Conséquence 1 (Coordonnées d'un point dans un repère du plan)**.**

Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan et si on se donne un point A, appelé *origine*, alors quel que soit le point M, on peut trouver un couple de réels $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{AM} = x * \vec{u} + y * \vec{v}$. On dit alors que le couple $(x\,;\,y)$ est le couple de *coordonnées* du point M dans le *repère* $(A; \vec{u}; \vec{v})$.
On note $M\,(x\,;\,y)$ (en ligne).

2 Équations de droite

2.1 Équations cartésiennes d'une droite

Définition 3 (Vecteur directeur d'une droite)**.**

On appelle *vecteur directeur* d'une droite $\mathscr{D}$ tout vecteur de la forme $\overrightarrow{AB}$ où $A \neq B$ et $A, B \in \mathscr{D}$

Définition 4.

Dans un repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$,

1. L'ensemble des points $M\,(x\,;\,y)$ dont les coordonnées vérifient une équation $ax + by = c$, où a, b et c sont trois nombres réels tels que $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$, est une droite.
2. L'ensemble des points $M\,(x\,;\,y)$ d'une droite vérifient une relation $ax + by = c$, où a, b et c sont des nombres réels.

On dit que l'équation $ax + by = c$ est une *équation cartésienne* de la droite (d).

On remarque que l'équation cartésienne propose une forme unique pour tous les types de droites, dans tous les types de repères.
On peut également utiliser les formes « *réduites* » $y = mx + p$ ou $x = c$ (pour les parallèles aux ordonnées).
On utilisera plutôt les cartésiennes dans un contexte géométrique et plutôt les réduites dans un contexte de fonctions (tangentes, etc...).

Propriété 3 (Vecteur directeur et équation cartésienne)**.**

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by = c$

■ **Exemple 3:**

- La droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $2x - 3y + 1 = 0$ admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$.
- La droite $\mathscr{D}_2$ d'équation $y = 4x - 7$ admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$

■ **Exemple 4:**

Méthode 1 Soient $A\,(-2\,;\,3)$ et $B\,(3\,;\,1)$. Trouver une équation cartésienne de la droite (AB).

Remarque 2.

Une équation cartésienne de droite n'est pas unique.
Par exemple $2x + 5y = 22$ et $4x + 10y = 44$ sont deux équations de la même droite.

▶ Exercice 1

Intersection des droites d : $2x - 3y = 4$ et d' : $3x + 4y = 1$.

2.2 Représentation paramétrique de droite dans le plan

Définition 5 (Représentation paramétrique de droite)**.**

Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on considère un point $A\left(x_A\,;\,y_A\right)$ et un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$. Soit (d) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Alors une *représentation (ou équation) paramétrique* de (d) est :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

▶ Exercice 2

On se donne un point $A\left(1\,;\,4\right)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$.

▶ Exercice 3

Soit (d) la droite d'équation cartésienne $2x - 3y + 1 = 0$

1. Déterminer un point et un vecteur directeur de la droite d. Tracer la droite dans un repère.
2. Déterminer une équation paramétrique de (d)
3. Le point $B\left(7\,;\,5\right)$ appartient-il à la droite d ? Justifier en utilisant les deux type de représentations : paramétrique et cartésienne.

▶ Exercice 4

Intersection des droites d : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$ et d' : $\begin{cases} x = 3 - t' \\ y = 2 - 3t' \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}$.

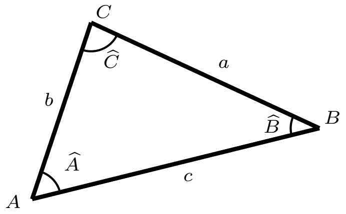
3 Produit scalaire

3.1 Définition et propriétés

Définition 6 (Produit scalaire)**.**

On appelle *produit scalaire* des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ le **nombre** noté $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ défini par l'une des formules suivantes (toutes équivalentes) :

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$ ou $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$ ou $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$
3. Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB), $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \overline{AH}$ où $\overline{AH}$ est la mesure algébrique (positive ou négative par rapport au sens de $\overrightarrow{AB}$).



Propriété 4 (Nullité du produit scalaire)**.**

Étant donnés trois points du plan A, B, et C. on a :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux}$$

Définition 7 (Norme d'un vecteur)**.**

On appelle *norme* du vecteur $\vec{u}$ la racine carrée du produit $\vec{u} \cdot \vec{u}$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Définition 8 (Repère orthonormé du plan)**.**

On dit que le repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ est *orthonormé* ou *orthonormal* si les vecteurs de la base sont orthogonaux et de même norme.

Théorème 1 (Expression analytique du ps dans un repère)**.**

Dans un repère **orthonormé** $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ du plan, si on se donne deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors l'expression du produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\boxed{\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v}} = xx' + yy'}$.

Remarque 3 (Calcul de longueur dans un repère)**.**

Dans un repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ orthonormal, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

on retrouve bien la relation de la longueur connue dès la seconde : $\underline{AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\| = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

■ **Exemple 5:**

$A\,(2\,;\,3)$, $B\,(-1\,;\,1)$. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ donc $AB = \sqrt{\dots^2 + \dots^2} = \dots$

Propriété 5 (Propriétés du produit scalaire)**.**

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan, et tout nombre réel λ,

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (commutativité)
- $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v} + \vec{w}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (linéarité / bilinéarité avec la commutativité)

On peut comprendre la linéarité comme une forme de distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition des vecteurs.

Propriété 6 (Identités remarquables)**.**

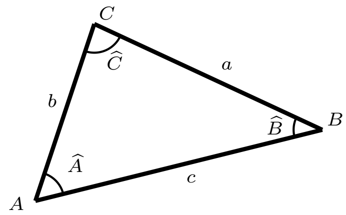
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a :

1. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
2. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
3. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Théorème 2 (Pythagore généralisé ou « Al-Kashi »).

Soit un triangle ABC, de côtés a, b, c et d'angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, et $\widehat{C}$. Alors

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\widehat{A}\right)$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\left(\widehat{B}\right)$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\widehat{C}\right)$



3.2 Vecteur normal à une droite

Définition 9 (Vecteur normal à une droite).

On appelle *vecteur normal* à une droite un vecteur orthogonal à tout vecteur directeur de la droite

Propriété 7 (Expression d'un vecteur normal à une droite).

$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}\ :\ ax + by = c$

Remarque 4.

Tout vecteur normal est colinéaire à $\vec{n}$

■ **Exemple 6:**

Trouver une équation de la droite d passant par $A\,(-1\,;\,1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4 Équation de cercle

Définition 10 (Équation de cercle).

Dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, étant donné un point $\Omega\,(x_\Omega\,;\,y_\Omega)$ et un nombre r positif, l'ensemble des points $M\,(x\,;\,y)$ du plan vérifiant la relation $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$ est le cercle de centre Ω de rayon r.
On peut aussi définir un cercle par son diamètre :
$M \in \mathscr{C}([AB]) \Longleftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

■ **Exemple 7:**
Donner l'équation du cercle de centre $A\,(3\,;\,4)$ et de rayon 5. Donner l'expression développée et réduite.

■ **Exemple 8:**
Soient $A\,(2\,;\,0)$ et $B\,(0\,;\,3)$. Déterminer une équation du cercle de diamètre [AB].
À quoi voit-on dans l'équation que l'origine du repère est sur le cercle ?