Feuille de TD n°6
Géométrie plane

1 Vecteurs et coordonnées

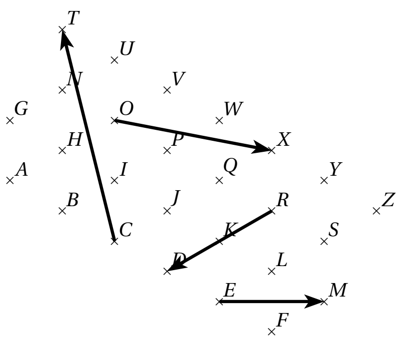
1.1 Colinéarité

$\boxed{1}$ Des bases

1. Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs sont colinéaires.
   (a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$
   (b) $\vec{u}\begin{pmatrix}15\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}7,5\\-1\end{pmatrix}$
   (c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{5}{6}\end{pmatrix}$
2. Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. Préciser si les points A, B et C sont alignés ou pas :
   (a) $A(3;4)$, $B(0;2)$ et $C(-2;1)$.
   (b) $A\left(\frac{5}{4};3\right)$, $B\left(\frac{1}{2};4\right)$ et $C\left(\frac{1}{4};\frac{13}{3}\right)$.
3. Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. Déterminer les valeurs possibles du réel x de sorte que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.
   (a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2x+1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\-1\end{pmatrix}$
   (b) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6-2x\\x-1\end{pmatrix}$
   (c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{x}\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1-2x\\-1\end{pmatrix}$

1.2 coordonnées

$\boxed{2}$



Décomposer chacun des vecteurs $\overrightarrow{CT}$, $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{RD}$ et $\overrightarrow{EM}$ dans les bases suivantes :

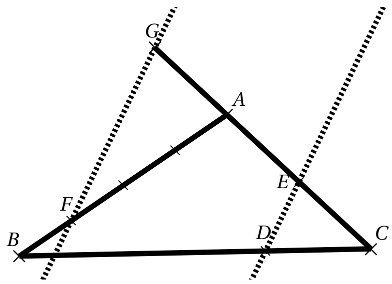
a. $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AH})$ | **b.** $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG})$ | **c.** $(\overrightarrow{HO};\overrightarrow{HN})$

$\boxed{3}$ On considère un triangle ABC non aplati. Dans chacun des cas suivants, exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis indiquer s'ils sont colinéaires.

1. $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$
2. $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$ et $\vec{v}=\frac{1}{2}\left(5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{2}BC$

$\boxed{4}$ Dans un triangle ABC non aplati, on considère les points D, E, F et G définis respectivement par :

1. $3\overrightarrow{DB}+7\overrightarrow{DC}=\vec{0}$
2. E est le milieu de $[AC]$
3. $3\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$
4. G est le symétrique de E par rapport à A.

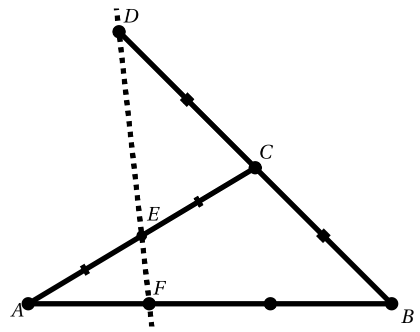


On souhaite démontrer que les droites (ED) et (FG) sont parallèles.

1. **En utilisant l'outil vectoriel**
   (a) Justifier que $\overrightarrow{CD}=\frac{3}{10}\overrightarrow{CB}$ puis que $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$
   (b) Exprimer, en utilisant la relation de Chasles, le vecteur $\overrightarrow{FG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (c) Montrer , de la même façon, que $\overrightarrow{ED}=\frac{3}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$
   (d) Conclure.
2. **En utilisant un repère**
   (a) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, E et G dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.
   (b) En exploitant les données de l'énoncé, calculer les coordonnées des points D et F.
   (c) Conclure.

$\boxed{5}$ **Recherche et exploitation d'un repère**

Dans un triangle non aplati ABC, on concisère le point D symétrique de B par rapport à C, E le milieu du segment $[AC]$ et F est tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.



En considérant un repère, démontrer que les points D, E et F sont alignés.

2 Équation de droite

2.1 Équation cartésienne

$\boxed{6}$ Soit d la droite d'équation cartésienne $5x - 3y + 1 = 0$

1. Déterminer un point et un vecteur directeur de la droite d. Tracer la droite dans un repère.
2. Le point $B\,(5; 7)$ appartient-il à la droite d ? Justifier.

$\boxed{7}$ Dans un repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$,

1. On considère la droite d d'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, où a et b sont des nombres réels non nuls. Déterminer les intersections de la droite avec les axes (Ox) et (Oy).
2. Donner une équation cartésienne de la droite passant par $A\,(4; 0)$ et $B\,(0; 3)$.

$\boxed{8}$ Application : Concours des médianes d'un triangle

Soit ABC un triangle, I, J et K les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA]. On se place dans le repère $\mathscr{R} = \left(A, \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des points de la figure dans le repère $\mathscr{R}$.
2. Déterminer les équations des médianes du triangle issues des sommets A et C.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection G des deux médianes
4. Prouver que le point G appartient à la médiane issue de B.

$\boxed{9}$ **Avec un paramètre**

Soit m un réel. On considère la famille de droites $\mathscr{D}_m$ d'équation :

$$x + (m-1)y - m = 0.$$

1. Tracer dans un repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_{-1}$.
2. Démontrer que pour tout réel m, la droite $\mathscr{D}_m$ passe par un point A dont on donnera les coordonnées.
3. (a) Peut-on trouver m tel que la droite $\mathscr{D}_m$ passe par le point $B(3\ ;\ 0)$?
   (b) Peut-on trouver m tel que la droite $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à l'axe des ordonnées ?
   (c) Peut-on trouver m tel que la droite $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à l'axe des abscisses ?

2.2 Représentation paramétrique

$\boxed{10}$

1. On considère la droite (d) caractérisée par le système paramétrique $\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner les coordonnées d'un point de la droite (d) et d'un vecteur directeur $\vec{u}$.
   (b) En déduire une équation cartésienne de la droite (d).
2. On considère la droite (d') d'équation cartésienne $-6x + 5y = 25$.
   (a) Donner les coordonnées d'un point B de la droite (d') et d'un vecteur directeur
   (b) En déduire une représentation paramétrique de la droite (d')
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des deux droites (d) et (d').

$\boxed{11}$ On considère les droites

(d_1): $4x - 3y = -16$, $\quad (d_2)$: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 10 - 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

(d_3): $\begin{cases} x = 4 + 6t \\ y = 10 + 8t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Déterminer les points d'intersections des droites non parallèles.
Dans le cas de parallélisme, préciser si les droites sont distinctes ou confondues.

3 Produit scalaire

3.1 Définition et propriétés

12 **Démontrer qu'un triangle est rectangle**

Démontrer que le triangle ABC est rectangle, avec $A(-1;-1)$, $B(-2;1)$ et $C(3;1)$.

13 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère les points $A(2;\lambda)$, $B(1;3)$ et $C(4;3-\lambda)$.
Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles le triangle ABC est rectangle en B.

14 **Médiatrices et concours**

Rappel : *La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.*

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on considère les points $A(1;6)$, $B(-3;2)$ et $C(6;1)$.

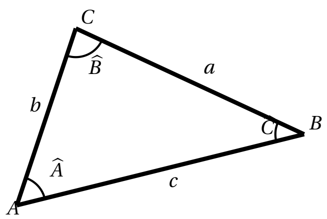
1. **Équation de la médiatrice d_1 du segment $[AB]$**
   (a) Exprimer MA^2 et MB^2 en fonction de x et y.
   (b) En déduire qu'une équation de la médiatrice de $[AB]$ est $x+y-3=0$
2. **Concours des médiatrices**
   (a) Déterminer de la même façon les équations des deux autres médiatrices .
   (b) Montrer que les trois droites sont concourantes (sécantes au même point d'intersection).
   (c) Comment s'appelle le point de concours des trois médiatrices ?

15 **Calcul d'angle dans un repère**

Dans un repère orthonormé, on donne : $A(-2;-1)$, $B(-3;2)$ et $C(5;4)$. Déterminer la mesure, arrondie au degré près, de l'angle $\widehat{BAC}$.

16 **Loi des sinus**

1. On se donne un triangle ABC :



Démontrer que l'aire du triangle ABC est égale à $S=\frac{1}{2}cb\sin\left(\widehat{A}\right)$

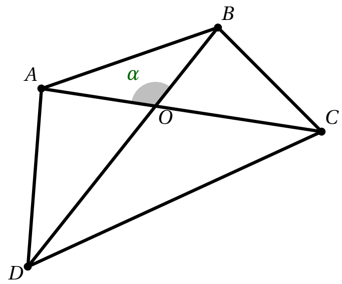
2. En déduire la « Loi des sinus » :

$$\frac{a}{\sin\left(\widehat{A}\right)}=\frac{b}{\sin\left(\widehat{B}\right)}=\frac{c}{\sin\left(\widehat{C}\right)}$$

17 **Application**

On donne ABC tel que $AB=5\,\text{cm}$, $\widehat{A}=30^\circ$ et $\widehat{B}=50^\circ$.
Faire un dessin.
Calculer BC et AC.

18 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent en O, et soit α la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$



Démontrer que l'aire de ce quadrilatère est égale à

$$\mathscr{S}=\frac{1}{2}AC\times BD\times\sin\alpha$$

19 On considère un segment $[AB]$ de longueur 4. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2+MB^2=20$?

20 $ABCD$ est un rectangle de centre O. Un point M est placé à l'intérieur du rectangle tel que $MA=30\,\text{cm}$, $MB=18\,\text{cm}$ et $MC=6\,\text{cm}$.

1. Faire une figure à main levée.
2. Démontrer que $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$.
3. En déduire la longueur MD.

3.2 Vecteur normal à une droite

21 Dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on considère une droite (d) : $3x-y=1$ et un point $E(0;1)$.

1. Vérifier que $E\notin(d)$
2. Déterminer la distance entre E et (d).

4 Équation de cercle

22 Donner l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(3;4)$ et de rayon 5. Donner l'expression développée et réduite.

23 Discuter des ensembles de points suivants :

- Soit l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant l'équation : $x^2+y^2+6x-2y+8=0$
- Soit l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant l'équation : $x^2+y^2-\frac{1}{2}x+y+1=0$.

24 On considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2+y^2-6x-8y=0$.

1. Déterminer le centre et le rayon de $\mathscr{C}$.
2. Le cercle $\mathscr{C}$ coupe-t-il les axes de coordonnées ? Si oui, préciser en quels points.

25 On considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2+y^2+4x+4y-17=0$ et la droite (d) d'équation cartésienne $x-2y+3=0$.
Déterminer les éventuels points d'intersection entre le cercle $\mathscr{C}$ et la droite (d).

26 On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(3;1)$, passant par l'origine du repère, et la droite (d) d'équation $x+y-2=0$.
Déterminer les éventuels points d'intersection entre le cercle $\mathscr{C}$ et la droite (d).

Feuille de TD n°6
Réponses ou Solutions

1 Vecteurs et coordonnées

1.1 Colinéarité

1

1. **a.** oui **b.** non **c.** oui
2. **a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC})=-1\neq 0$, donc A, B et C ne sont pas alignés.

   b. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3/4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\4/3\end{pmatrix}$ et $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0$, donc A, B et C sont alignés.
3. **a.** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix}2x+1 & x\\ 3 & -1\end{vmatrix}=0 \iff -2x-1-3x=0 \iff x=-\dfrac{1}{5}$.

   b. $\begin{vmatrix}4 & 6-2x\\ x & x-1\end{vmatrix}=0 \iff 4x-4-6x+2x^2=0$ $\Delta=36>0$, donc deux solutions :$\begin{cases}x_1 &= 2\\ x_2 &= -1\end{cases}$.

   c. $\begin{vmatrix}1/x & 1-2x\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0 \iff -\dfrac{1}{x}-1+2x=0$ et si $x\neq 0$, $\iff -1-x+2x^2$ $\Delta=9$, donc deux solutions : $\begin{cases}x_1 &= 1\\ x_2 &= -1/2\end{cases}$

1.2 coordonnées

2

a. Base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH})$:
- $\overrightarrow{CT}=-4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AH}$
- $\overrightarrow{OX}=2\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AH}$
- $\overrightarrow{RD}=0\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AH}$
- $\overrightarrow{EM}=1\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AH}$

b. Base $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG})$:
- $\overrightarrow{CT}=-1/2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AG}$
- $\overrightarrow{OX}=3/2\overrightarrow{AC}+1\overrightarrow{AG}$
- $\overrightarrow{RD}=-1\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AG}$
- $\overrightarrow{EM}=1\overrightarrow{AC}+1\overrightarrow{AG}$

c. Base $(\overrightarrow{HO},\overrightarrow{HN})$:
- $\overrightarrow{CT}=-1\overrightarrow{HO}+4\overrightarrow{HN}$
- $\overrightarrow{OX}=3\overrightarrow{HO}-2\overrightarrow{HN}$
- $\overrightarrow{RD}=-2\overrightarrow{HO}+0\overrightarrow{HN}$
- $\overrightarrow{EM}=2\overrightarrow{HO}-1\overrightarrow{HN}$

3

1. $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AC}=1\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2. $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=3\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AC}$. On a $\vec{v}=3\vec{u}$ et donc les vecteurs sont colinéaires.

4 Préliminaire : placement des points.

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{DB}+7\overrightarrow{DC} &= \vec{0}\\ 3\overrightarrow{DB}+7\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\right) &= \vec{0}\\ 10\overrightarrow{DB}+7\overrightarrow{BC} &= \vec{0}\\ \overrightarrow{BD} &= \frac{7}{10}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FA} &= \vec{0}\\ 3\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA} &= \vec{0}\\ 4\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA} &= \vec{0}\\ \overrightarrow{BF} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}\end{aligned}$$

Partie I Résolution vectorielle

1.

$\underline{\overrightarrow{CD}\ :}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\\ \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CB}-\frac{7}{10}\overrightarrow{CB}\\ \overrightarrow{CD} &= \frac{3}{10}\overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

$\underline{\overrightarrow{AF}\ :}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}\\ \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AF} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

2. Expression des vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{ED}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   Cela est possible car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (sinon les points A, B et C seraient alignés et le triangle ABC aplati).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AG}\\ \overrightarrow{FG} &= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ED} &= \overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{ED} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{10}\overrightarrow{CB}\\ \overrightarrow{ED} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{10}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)\\ \overrightarrow{ED} &= \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

On remarque que :

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{5}\right) &= \frac{1}{5}\\ -\frac{3}{4}\times\left(-\frac{2}{5}\right) &= \frac{3}{10}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \overrightarrow{ED}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{FG}$$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires et par conséquent, <u>les droites (ED) et (FG) sont parallèles</u>.

Partie II Résolution en utilisant un repère

Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$, on a rapidement :

$$A\,(0\,;0)\quad B\,(1\,;0)\quad C\,(0\,;1)\quad E\left(0\,;\frac{1}{2}\right)\quad G\left(0\,;-\frac{1}{2}\right)$$

Pour le point F, on a prouvé plus haut que $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, ainsi, $\underline{F\left(\frac{3}{4}\,;0\right)}$.

Pour le point D, il faut bricoler un peu :

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\frac{3}{10}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{10}\\ \frac{7}{10}\end{pmatrix}$$

Ainsi, $\underline{D\left(\frac{3}{10}\,;\frac{7}{10}\right)}$.

Dans ce repère, $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}\frac{3}{10}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, on calcule ainsi le déterminant :

$$\det\left(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{GF}\right)=\begin{vmatrix}\frac{3}{10} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{3}{20}-\frac{3}{20}=0$$

Donc $\overrightarrow{ED}$ est colinéaire à $\overrightarrow{GF}$ et donc <u>les droites (ED) et (GF) sont parallèles.</u>

$\boxed{5}$ Dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, les coordonnées des points de la figure sont les suivants :

$$A\,(0\,;0)\qquad B\,(1\,;0)\qquad C\,(0\,;1)\qquad E\left(0\,;\frac{1}{2}\right)\qquad F\left(\frac{1}{3}\,;0\right)\qquad D\,(-1\,;2)$$

Pour les coordonnées de D, on exprime $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\mathbf{-1}\overrightarrow{AB}+\mathbf{2}\overrightarrow{AC}$$

On a donc les vecteurs $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\-3/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}4/3\\-2\end{pmatrix}$. On a

$$\begin{vmatrix}1 & 4/3\\ -3/2 & -2\end{vmatrix}=-2+\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=0$$

Donc les points D, E et F sont alignés.

2 Équation de droite

2.1 Équation cartésienne

6

1. Le point $A(1;2)$ appartient à la droite (d) car $5\times1-3\times2+1=0$. Un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.
2. Le point $B(7;5)$ n'appartient pas à la droite d car $5\times5-3\times7+1=0$.

7

1. $A(a;0)$ et $B(0;b)$ sont les intersections avec les axes de coordonnées.
2. Une équation de la droite passant par $A(4;0)$ et $B(0;3)$ est donc $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1 \iff 3x+4y=12$.

8

1. Coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$:

$$A(0;0)\quad B(1;0)\quad C(0;1)\quad I\left(\frac{1}{2};0\right)\quad J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\quad K\left(0;\frac{1}{2}\right)$$

Équation de (AJ) : $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur et $M(x;y)\in(AJ) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\iff \begin{vmatrix}x & 1\\ y & 1\end{vmatrix}=0 \iff x-y=0$$

Équation de (CI) : $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}1/2\\-1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur et $M(x;y)\in(AJ) \iff \overrightarrow{CM}$ et $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\iff \begin{vmatrix}x & 1\\ y-1 & -2\end{vmatrix}=0 \iff -2x-y+1=0$$

L'intersection des médianes est donc le point de coordonnées (x,y) vérifiant le système :

$$\begin{cases} x-y=0\\ -2x-y+1=0\end{cases} \iff \begin{cases} x=y\\ 2x+x=1\end{cases} \iff \begin{cases} x=1/3\\ y=1/3\end{cases}$$

2. La médiane issue de B a pour équation $x+2y-1=0$ et les coordonnées de G vérifient bien l'équation de la droite, ainsi, G appartient bien à la troisième médiane.

   Cela prouve que les médianes d'un triangle sont concourantes.

9

1. On trace les droites d'équations $x=1$, $x+y-2=0$, $x-2y+1=0$
2. Résolvons le système

$$\begin{cases} x+y=2\\ x-2y=-1\end{cases} \iff \begin{cases} x+y=2\\ 3y=3\end{cases} \iff \begin{cases} x=1\\ y=1\end{cases}$$

   Il est clair que le point $A(1;1)$ appartient aux trois droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_{-1}$.
   Soit $m\in\mathbb{R}$, $1+(m-1)\times1-m=1+m-1-m=0$, donc les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite $\mathscr{D}_m$ quel que soit $m\in\mathbb{R}$.
   On en conclut que toutes les droites $\mathscr{D}_m$ sont concourantes en A.
3. (a) $3+(m-1)\times0-m=0 \iff m=3$, donc $\mathscr{D}_3$ passe par $B(3;0)$.

   (b) Un vecteur directeur de $\mathscr{D}_m$ est $\overrightarrow{u_m}\begin{pmatrix}1-m\\1\end{pmatrix}$, il sera colinéaire avec l'axe des ordonnées si et seulement si $m=1$.

   (c) Un vecteur directeur de $\mathscr{D}_m$ est $\overrightarrow{u_m}\begin{pmatrix}1-m\\1\end{pmatrix}$ qui ne peut pas être colinéaire avec $\overrightarrow{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

2.2 Représentation paramétrique

3 Produit scalaire

3.1 Définition et propriétés

$\boxed{\mathbf{12}}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -1\times4+2\times2 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et donc le triangle ABC rectangle en A.

$\boxed{\mathbf{14}}$

1. Équation de la médiatrice (d_1)

   a. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+3\\y-2\end{pmatrix}$ donc $AM^2 = (x-1)^2+(y-6)^2$ et $BM^2 = (x+3)^2+(y-2)^2$.

   b.
$$\begin{aligned} MA^2 &= MB^2\\ (x-1)^2+(y-6)^2 &= (x+3)^2+(y-2)^2\\ -8x-8y+24 &= 0\\ x+y-3 &= 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, $M\left(x;y\right)\in d_1 = \mathrm{Méd}([AB]) \iff \mathrm{x+y-3=0}$

2. Cercle circonscrit

   a. $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-6\\y-1\end{pmatrix}$ donc $CM^2 = (x-6)^2+(y-1)^2$ et

$$\begin{aligned} MA^2 &= MC^2\\ (x-1)^2+(y-6)^2 &= (x-6)^2+(y-1)^2\\ 10x-10y &= 0\\ x-y &= 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, $M\left(x;y\right)\in d_2 = \mathrm{Méd}([AC]) \iff \mathrm{x-y=0}$

   b. Le centre Ω du cercle circonscrit appartient aux deux médiatrices, ainsi, ses coordonnées sont solution du système :

$$\left\{\begin{aligned} x+y &= 3\\ x-y &= 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} 2x &= 3 \qquad (L_1+L_2)\\ x &= y \end{aligned}\right. \iff \underline{\Omega\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)}$$

$\boxed{\mathbf{15}}$ On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 8$, puis, en utilisant la formule d'Al-Kashi, on trouve :

$$\cos\widehat{A} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{8}{\sqrt{10}\times\sqrt{74}} = \frac{4}{\sqrt{185}}$$

$\boxed{\mathbf{16}}$

1. D'après la formule classique de l'aire d'un triangle, $S = \dfrac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2} = \dfrac{1}{2}c\underbrace{b\sin\widehat{A}}_{\text{hauteur issue C}}$

2. Par permutation circulaire, on obtient les formules équivalentes :

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ca\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$$

   Puis on divise toutes les fractions par $\dfrac{abc}{2}$ et on obtient la loi des sinus.

$$\frac{a}{\sin\left(\widehat{A}\right)} = \frac{b}{\sin\left(\widehat{B}\right)} = \frac{c}{\sin\left(\widehat{C}\right)}$$

$\boxed{17}$ $\dfrac{a}{\sin 30} = \dfrac{b}{\sin 50} = \dfrac{5}{\sin 100}$

$\boxed{18}$ $\mathscr{S} = \mathscr{A}_{AOB} + \mathscr{A}_{BOC} + \mathscr{A}_{COD} + \mathscr{A}_{DOA}$ Puis on utilise $S = \dfrac{1}{2}cb\sin\left(\widehat{A}\right)$ sachant que $\widehat{BOC} = \pi - \alpha$ et que $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathscr{S} &= \frac{1}{2}\sin\alpha\,(OA \times OB + OB \times OC + OC \times OD + OD \times OA) \\
&= \frac{1}{2}\sin\alpha\big(OB \times (OA + OC) + OD \times (OC + OA)\big) \\
&= \frac{1}{2}\sin\alpha\big(AC \times (OB + OD)\big) \\
&= \frac{1}{2}\sin\alpha AC \times BD
\end{aligned}$$

$\boxed{19}$ On sait, d'après le théorème de la médiane, que pour tout point M , on a $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{1}{2}AB^2$, où I est le milieu de $[AB]$.
Ainsi, on a $2MI^2 = 20 - \dfrac{1}{2} \times 4^2 = 12 \iff MI = \sqrt{6}$. L'ensemble des points recherchés est donc le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{6}$.

$\boxed{20}$

1. Dans un rectangle, les diagonales sont de même longueur et ont même milieu. Donc $AC = BD$ et O est le milieu commun.
   Par ailleurs, d'après le théorème de la médiane, $MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + \dfrac{1}{2}AC^2$ t par ailleurs, $MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + \dfrac{1}{2}BD^2$. D'où la relation, $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.
2. $MD^2 = 30^2 + 6^2 - 18^2 = 612$, donc $MD = 6\sqrt{17}$

3.2 Vecteur normal à une droite

$\boxed{21}$

1. les coordonnées de E ne vérifient pas l'équation de d.
2. Un vecteur normal à d est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.
   (a) Une équation de la perpendiculaire à d passant par E peut-être définie par $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3t \\ y &=& 1-t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.
   (b) On cherche le projeté orthogonal H de E sur d :
   $$3 \times 3t - (1-t) = 1 \iff t = \frac{1}{5}$$
   Donc $H\left(\dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5}\right)$
   (c) Ainsi $\text{dist}(E,d) = \overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}\dfrac{3}{5}\\-\dfrac{1}{5}\end{pmatrix}$ et donc $\|\overrightarrow{EH}\| = \dfrac{1}{5}\sqrt{3^2 + (-1)^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

4 Équation de cercle

$\boxed{22}$ $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2 \iff x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8x + 16 = 25 \iff x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

$\boxed{23}$

1. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 8 = 0 \iff (x+3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + 8 = 0 \iff (x+3)^2 + (y-1)^2 = 2$
   L'ensemble est le cercle de centre $\Omega(-3; 1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

2. $x^2+y^2-\frac{1}{2}x+y+1=0 \iff \left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=0 \iff \left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{11}{16}$
   Il n'y a donc aucun point du plan qui vérifie l'équation initiale. On dit que l'ensemble des points est l'ensemble vide : $\emptyset$.

$\boxed{\mathbf{24}}$ Centre $\Omega(3;4)$, rayon 5.
Axe des abscisses : $y=0$, pour trouver les intersections, on résout le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2-6x-8y &=& 0\\ y &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2-6x &=& 0\\ y &=& 0\end{array}\right.$$

les deux solutions sont $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& 0\\ x_2 &=& 6\end{array}\right.$
Axe des ordonnées : $x=0$, pour trouver les intersections, on résout le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2-6x-8y &=& 0\\ x &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y^2-8y &=& 0\\ x &=& 0\end{array}\right.$$

les deux solutions sont $\left\{\begin{array}{rcl} y_1 &=& 0\\ y_2 &=& 8\end{array}\right.$

$\boxed{\mathbf{25}}$ Système non linéaire, résolution par **substitution** :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+4x+4y-17 &=& 0\\ x-2y+3 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 4y^2-12y+9+y^2+8y-12+4y-17 &=& 0\\ x &=& 2y-3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 5y^2-20 &=& 0\\ x &=& 2y-3\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& \pm 2\\ x &=& 2y-3\end{array}\right.$$

Ainsi, les deux intersections sont : $I(-7;-2)$ et $J(1;2)$.

$\boxed{\mathbf{26}}$ L'équation du cercle est : $x^2+y^2-6x-2y=0$. Le système est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2-6x-2y &=& 0\\ x+y-2 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2-6x-2y &=& 0\\ x &=& 2-y\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 4-4y+y^2+y^2-12+6y-2y &=& 0\\ x &=& 2-y\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2y^2-8 &=& 0\\ x &=& 2-y\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& \pm 2\\ x &=& 2-y\end{array}\right. \iff I(0;2) \text{ et } J(4;-2) \text{ sont les intersections}$$