Correction DS 1 — Série générale

Exercice 1

1°) $x^2-4x-1=0$ $\quad \Delta = 20$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$

2°) $(2x^2-5x+4)(x^2-x-2) \geqslant 0$

. Etude de $2x^2-5x+4$. $\Delta = -7 < 0$ donc pas de racines réelles

. Etude de $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$ donc 2 racines : -1 et 2.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$2x^2-5x+4$		+		+		+	
x^2-x-2		+	0	−	0	+	
produit		+	0	−	0	+	

$\mathcal{S} =]-\infty ; -1] \cup [2 ; +\infty[$

3°) $\dfrac{3x^2+x-4}{-x^2-2x+15} \leqslant 0$ $\quad 3x^2+x-4 = (x-1)(3x+4)$ avec racines évidentes.

$-x^2-2x+15 = (x-3)(x+5)$

x	$-\infty$		-5		$-\frac{4}{3}$		1		3		$+\infty$
$3x^2+x-4$		+		+	0	−	0	+		+	
$-x^2-2x+15$		−	0	+		+		+	0	−	
$\dfrac{3x^2+x-4}{-x^2-2x+15}$		−	‖	+	0	−	0	+	‖	−	

$\mathcal{S} =]-\infty ; -5[\cup [-\frac{4}{3} ; 1] \cup]3 ; +\infty[$

Exercice 2

• f s'annule en -3 et 2. donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-2)(x+3)$

$f(-1) = -2 \iff -2 = a(-3) \times 2 \iff a = \frac{1}{3}$. Donc $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)(x+3)$

• g a un maximum de 4 atteint en -2. donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = a(x+2)^2 + 4$

et $g(1) = 2 \iff a \times 3^2 + 4 = 2 \iff a = -\frac{2}{9}$ Donc $g(x) = -\frac{2}{9}(x+2)^2 + 4$

Exercice 3 $\quad 2x^3 - 8x^2 + 3x + 10 = 0$

1°) $2 \times 2^3 - 8 \times 2^2 + 3 \times 2 + 10 = 16 - 32 + 16 = 0$ donc 2 est une solution de l'équation.

2°) Pour factoriser par $x-2$, on peut utiliser le tableau de Hörner ou une division euclidienne.

	2	−8	3	10
2	↓	4	−8	−10
	2	−4	−5	0

Donc $2x^3-8x^2+3x+10 = (x-2)(2x^2-4x-5)$

3°) $2x^3-8x^2+3x+10 = 0 \iff x-2=0$ ou $2x^2-4x-5=0$ $\quad \Delta = 56$

$\iff x = 2$ ou $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{14}}{2}$

Exercice 4

Soient $a, b > 0$.

Montrons que $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ (① ②)

② $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$ donc $a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0$

donc $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$

① $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \iff \dfrac{2}{\frac{a+b}{ab}} \leqslant \sqrt{ab} \iff \dfrac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab}$

$\iff \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ vrai d'après ②

Donc $\forall a, b > 0$, $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$

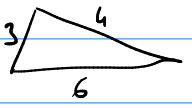
Exercice 5

$\sqrt{x^2-2x} = x-3 \iff x^2-2x = (x-3)^2$ et $x-3 \geqslant 0$

$\iff 4x = 9$ et $x \geqslant 3$

$\iff x = \frac{9}{4} = 2{,}25$ et $x \geqslant 3$ donc $\mathcal{S} = \emptyset$

Exercice 6

1°) 

$6^2 = 36$

$3^2 + 4^2 = 25$

donc d'après le théorème de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle.

2°) Si on ajoute la même largeur x à tout les côté. Le triangle est rectangle

$\iff (3+x)^2 + (4+x)^2 = (6+x)^2 \iff x^2 + 2x - 11 = 0 \quad \Delta = 48 = 16 \times 3 = (4\sqrt{3})^2$

$\iff x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{48}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{3}$ or $-1 - 2\sqrt{3} < 0$

Donc le triangle est rectangle si et seulement si on ajoute $2\sqrt{3} - 1$ à chaque côté