

Correction DM 3

Exercice 1 :

1°) $4x^2 - 8x + 1 = 0$

Sol^e évidente : 1 - Par produit: $\frac{1}{4}$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{4}; 1 \right\}$$

2°) $2x^2 - 12x + 13 = 0$

$$\Delta = 144 - 8 \times 13 = 40$$

$$x_1 = \frac{12 - 2\sqrt{10}}{4} = \frac{6 - \sqrt{10}}{2}$$

$$x_2 = \frac{12 + 2\sqrt{10}}{4} = \frac{6 + \sqrt{10}}{2}$$

3°) $-2x^2 + 3x - 1 \geq 0$

le trinôme a 2 racines: 1 et $\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$-2x^2 + 3x - 1$	-	+	+	-

car $a = -2 < 0$

$$\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$$

4°) $-2x^2 > \frac{9}{2} - 6x \Leftrightarrow -4x^2 > 9 - 12x$

$$\Leftrightarrow -4x^2 + 12x - 9 > 0$$

$$\Leftrightarrow -(4x^2 - 12x + 9) > 0$$

$$\Leftrightarrow -(2x - 3)^2 > 0 \text{ donc } \mathcal{S} = \emptyset$$

5°) $\frac{2x^2 - 12x + 19}{x - 2} \leq 0$

Numérateur: $\Delta = 144 - 8 \times 19 = -8 < 0$

Donc par tout x réel, $2x^2 - 12x + 19 > 0$

On peut donc construire le tab. de signes:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2x^2 - 12x + 19$	+	+	+
$x - 2$	-	0	+
$\frac{2x^2 - 12x + 19}{x - 2}$	-		+

$$\mathcal{S} =]-\infty; 2[$$

6°) $-2x(x - 2)(x^2 - 8x + 16) > 0$

On remarque que $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$

Ainsi on a le tableau suivant:

$$\mathcal{S} =]2; 4[$$

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$-2x$	+	0	-	-	-
$x - 2$	-	-	0	+	+
$x^2 - 8x + 16$	+	+	+	0	+
produit	-	+	-	+	-

Exercice 2 :

On cherche à résoudre l'inéquation

$$3x^2 + x - 1 \leq x^2 - 4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 \leq 0$$

Etude du trinôme: $\Delta = 25 + 24 = 49$

$$x_1 = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{-5 - 7}{4} = -3$$

Donc, comme $a = 2 > 0$,

$$\mathcal{S} = \left[-3; \frac{1}{2} \right]$$

la courbe de la première parabole est au dessus de la seconde sur $\left[-3; \frac{1}{2} \right]$

Exercice 3:

1) $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad x \in \mathbb{R}.$

a)
$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ &= a_0 + x(a_1 + a_2 x + a_3 x^2) \\ &= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + a_3 x)) \end{aligned}$$

Nombre d'opérations :

• Formule classique: $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$x \rightarrow x^2 \rightarrow x^3 \quad 3 \text{ op}$
 $\times a_3 \quad \times a_2 \quad \times a_1 \quad 6 \text{ op}$

$a_0 + + + \quad 9 \text{ op}$

• Formule de Horner :

$$\begin{aligned} a_3 &\xrightarrow{\times x^1} x a_3 \xrightarrow{+ a_2^2} a_2 + x a_3 \xrightarrow{\times x^2} x(a_2 + x a_3) \xrightarrow{+ a_1^4} a_1 + x(a_2 + x a_3) \\ &\xrightarrow{\times x^3} x(a_1 + x(a_2 + x a_3)) \xrightarrow{+ a_0^6} P(x) \quad 6 \text{ opérations} \end{aligned}$$

L'algorithme de Horner peut être utilisé par sauta du temps le nombre d'opérations -

3) Si $P(x) = 0 \Leftrightarrow a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x a_3)) = 0$
 Soit $x \in \mathbb{R}$, $(x - \alpha)(a_3 x^2 + (a_2 + x a_3)x + a_1 + x(a_2 + x a_3)) = 0$

$$\begin{aligned} &= a_3 x^3 + (a_2 + x a_3)x^2 + (a_1 + x(a_2 + x a_3))x - \alpha a_3 x^2 - \alpha(a_2 + x a_3)x - \alpha(a_1 + x(a_2 + x a_3)) \\ &= a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = P(x) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout x réel, $P(x) = (x - \alpha)(C_3 x^2 + C_2 x + C_1)$

où
$$\begin{aligned} C_3 &= a_3 &= a_3 \\ C_2 &= a_2 + x a_3 &= a_2 + x C_3 \\ C_1 &= a_1 + x(a_2 + x a_3) &= a_1 + x C_2 \end{aligned}$$

Coefficients de Horner.