Feuille de TD n°1
Second Degré

1 Étude des fonctions polynômes du second degré

1.1 Fonction polynôme de degré 2

1 Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est une fonction polynôme du second degré et, le cas échéant, donner les valeurs de a, b et c.

1. $f(x) = 2x^2 + 1$
2. $h(x) = (x-1)(3x+2)$ (développer)
3. $g(x) = x^3 + 2x^2$
4. $i(x) = (x+1)^2 - x^2$

1.2 Forme canonique

2 **Trouver la forme canonique** Donner la forme canonique de chacun des trinômes suivants :

1. $2x^2 + 6x - 3$
2. $3x^2 + 2x - 6$
3. $3x + 4x^2 - 1$
4. $0,5x^2 + 0,5 - x$
5. $x^2 - 6x - 3$
6. $x^2 + 10x + 5$
7. $3x^2 + 12x + 19$
8. $4x^2 - 28x + 24$

3 **Lien forme canonique avec le graphique**

Soit $\mathscr{P}$ la parabole représentant le trinôme défini par $f(x) = x^2 + bx + c$ et S son sommet. On sait que $f(0) = f(6)$ et que $y_S = 4$.
Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

4 Soit $\mathscr{P}$ la parabole représentant dans un repère orthogonal le trinôme $f(x) = -4(x-3)^2 + 7$.
Déterminer les coordonnées du sommet S de $\mathscr{P}$.

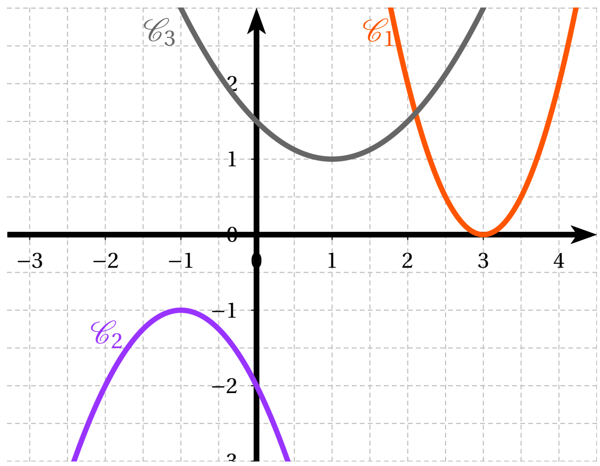
1.3 Variations

5 Déterminer le sommet et l'axe de symétrie des paraboles d'équations suivantes :

1. $y = -4(x-3)^2 + 7$
2. $y = 2(x+1)^2 - 3$
3. $y = -3x^2 + 5$
4. $y = (2x-4)^2 + 3$

6 Les fonctions f, g et h sont définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -(x+1)^2 - 1$, $g(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + 1$ et $h(x) = 2(x-3)^2$

On donne ci-dessous leurs courbes représentatives. Associer, en justifiant, chaque fonction, à sa courbe.



7 **Un problème d'optimisation (1) :**

Un éleveur de chiens souhaite créer un enclos rectangulaire pour ses animaux. Il dispose de 20 m de clôture.
Quelles doivent être les dimensions de l'enclos pour que la surface soit maximale ?

1.4 Courbe représentative

8 **Axe de symétrie de la parabole :**

Soit f la fonction définie pour tout x réel par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ et h un nombre réel positif quelconque.

1. Calculer les images de $\alpha - h$ et de $\alpha + h$ en fonction de h.
2. Interpréter graphiquement les nombres $\alpha - h$, $\alpha + h$, $f(\alpha - h)$ et $f(\alpha + h)$.

3. En déduire que la parabole représentative de f admet un axe de symétrie d'équation $x = \alpha$.

$\boxed{9}$ **** Parabole par foyer et directrice :** Dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, soient $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = 5$ et F le point de coordonnées $F(3;3)$.
L'objet de cet exercice est de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points équidistants de $\mathscr{D}$ et de F.

1. (a) Faire une figure
   (b) Placer quelques points qui semblent convenir.
2. Soit $M(x;y)$
   (a) Calculer MF^2 en fonction de x et y.
   (b) Calculer la distance entre M et $\mathscr{D}$ en fonction de x et y.
   (c) En déduire l'expression de y en fonction de x quand M décrit $\mathscr{E}$.
   (d) Réciproquement, vérifier que si x et y vérifient la relation précédente, alors $M \in \mathscr{E}$.
   (e) Conclure.

$\boxed{10}$ Donner l'équation de la parabole qui :

- coupe l'axe des abscisses en -1 et en 3 et qui passe par le point de coordonnées $(0,2)$
- coupe l'axe des abscisses en 1 et en -2 et qui passe par le point de coordonnées $(0,-4)$
- a pour sommet $S(-1;-2)$ et passe par le point de coordonnées $(0,1)$
- a pour sommet $S(1;4)$ et passe par le point de coordonnées $(0,1)$

2 Équations du second degré

2.1 Racine du trinôme

$\boxed{11}$ Déterminer les racines des trinômes suivants, en cherchant des racines évidentes.

1. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
2. $g(x) = x^2 - 3x - 4$
3. $h(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{4}x$
4. $k(x) = -x^2 + 5x - 6$

$\boxed{12}$ Compléter les factorisations suivantes :

1. $x^2 + 7x - 8 = (x-1)(\ldots x + \ldots)$
2. $2x^2 + 7x + 5 = (x+1)(\ldots x + \ldots)$
3. $-3x^2 + 10x - 7 = (x - \ldots)(\ldots x + \ldots)$
4. $-2x^2 + 8x - 8 = \ldots(x - \ldots)^2$

2.2 Résolution

$\boxed{13}$ **Forme canonique et racines**

Soit f le trinôme défini par $f(x) = -7(x+2)^2 - 5$.

1. Déterminer, sans le calculer, le signe du discriminant de f.
2. En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{14}$ Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 + 2x - 3 = 0$
2. $x^2 + 2x + 1 = 0$
3. $4x^2 - 4x + 1 = 0$
4. $2x^2 - 3x + 2 = 0$
5. $-3x^2 + 6x + 9 = 0$
6. $4x^2 = 2x + 3$
7. $3x^2 + 3x + 3 = 10 - x$
8. $2x^2 - 2x + 5 = 2x + 4 - 2x^2$

$\boxed{15}$ Dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, justifier que si a et c sont de signes contraires, alors l'équation admet deux solutions réelles.

$\boxed{16}$ **Résolution d'équations (2)**

Il n'est parfois pas nécessaire d'utiliser le discriminant.

1. $2x^2 - 3 = 0$
2. $x^2 + 19 = 12$
3. $x^2 - 4x = 0$
4. $6x^2 - x - 1 = 0$
5. $16x^2 - 8x + 13 = 0$
6. $2x^2 - 10x + \dfrac{25}{4} = 0$

17 **Équation à paramètre :**

On considère le trinôme suivant :

$$x^2-(2m+3)x+m^2$$

Pour quelles valeurs de m ce trinôme n'admet-il qu'une seule racine réelle ? Déterminer alors cette racine.

18 **Une équation du troisième degré**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$.
On cherche à résoudre l'équation

$$(E): \quad x^3-2x^2-5x+6=0$$

.

1. Vérifier que 1 est solution de l'équation.
2. On admet que $f(x)$ peut s'écrire, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$. Déterminer, en utilisant une technique de division, ou d'identification, les valeurs de a, b et c.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation (E)

19 **Pratiquer la division de polynômes**
Compléter les factorisations suivantes :

1. $3x^2-7x+4=(x-1)(\ldots\ldots\ldots)$
2. $x^3-x^2-x-2=(x-2)(\ldots\ldots)$
3. $2x^3+2x^2-17x-15=(x+3)(\ldots\ldots)$
4. $6x^3-x^2-5x+2=(2x-1)(\ldots\ldots)$

20 **Factoriser pour résoudre une équation :**

1. Factoriser les expressions x^2+x-2 et $-3x^2-5x+2$.
2. Résoudre l'équation

$$(E)\ :\ \frac{1}{x^2+x-2}-\frac{2x}{-3x^2-5x+2}=0$$

21 **Somme et produit de racines :**

Si f est une fpsd définie par $f(x)=ax^2+bx+c$, admettant deux racines, exprimer la somme et le produit des racines en fonction de a, b et c. Étudier ensuite en particulier le cas où $a=1$.
Indication : utiliser la forme factorisée que vous développerez.

22 Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ un trinôme du second degré admettant deux racines réelles x_1 et x_2.

On rappelle que $\begin{cases} x_1+x_2 &= -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 &= \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

1. **Calcul de $x_1^2+x_2^2$**
   (a) Compléter l'égalité : $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-\ldots\ldots$
   (b) En déduire une expression de $x_1^2+x_2^2$ en fonction de a, b et c.
2. **Calcul de $x_1^3+x_2^3$**
   (a) En s'inspirant de la question précédente, exprimer $x_1^3+x_2^3$ en fonction de x_1+x_2 et de x_1x_2 [1].
   (b) En déduire que $x_1^3+x_2^3=\dfrac{-b^3+3abc}{a^3}$
3. **Application**
   Soit P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=x^2-x-1$.
   (a) Justifier brièvement que P admet deux racines réelles x_1 et x_2.
   (b) Déterminer, sans calculer ces deux racines, les valeurs de x_1+x_2, $x_1^2+x_2^2$ et $x_1^3+x_2^3$.
   (c) Calculer la valeur des racines du trinôme, et vérifier les résultats obtenus.

23 **Équation à paramètre (2)**

On considère l'équation suivante :

$$(4m+1)x^2-4mx+m-3=0 \quad , \qquad \text{où } m\in\mathbb{R}$$

Pour quelles valeurs de m admet-elle des solutions distinctes ?

Donner les expressions des solutions en fonction de m.

24 **Un problème**

On prolonge de 12 cm un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle isocèle. La longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle

1. On rappelle que $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

obtenu est alors 5 fois supérieure à celle du triangle initial.

Quelles étaient les dimensions du triangle initial ?

25 **Changements d'inconnue**

1. Une *équation bicarrée* ne comporte que des termes de degrés pairs :
   Résoudre l'équation $x^4-16x^2+39=0$ en posant dans un premier temps comme nouvelle inconnue X définie par $X=x^2$. On obtiendra une nouvelle équation qui sera du second degré en X.
2. Résoudre les équations suivantes en proposant un changement d'inconnue adéquat.
   (a) $5x^4-x^2-4=0$
   (b) $5x-7\sqrt{x}-6=0$

26 Équation avec des radicaux $A=\sqrt{B}$:

1. À l'aide de la calculatrice, tracer les représentations graphiques des fonctions $x\mapsto 5-x$ et $x\mapsto 3\sqrt{4-x}$.
2. Conjecturer, grâce au graphique, le nombre de solutions et leurs valeurs approchées de l'équation $5-x=3\sqrt{4-x}$.
3. Résoudre par le calcul l'équation $5-x=3\sqrt{4-x}$.

Indication : $\boxed{A=\sqrt{B} \iff A^2=B \text{ et } A\geqslant 0}$

27 **** Tangentes passant par un point donné**

Dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, soient $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y=x^2-4x+10$ et $A(0;h)$ un point de l'axe des ordonnées, avec $h\in\mathbb{R}$.

1. Soit m un réel et $\mathscr{D}_m$ la droite de coefficient directeur m passant par A. Donner l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}_m$.
2. Déterminer, en fonction de h, les valeurs de m pour lesquelles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}_m$ ont un seul point commun.
3. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

28 **Interpolation (Lagrange)** : Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, soient $M_0\left(x_0\,;y_0\right)$, $M_1\left(x_1\,;y_1\right)$ et $M_2\left(x_2\,;y_2\right)$ trois points tels que $x_0\neq x_1$, $x_0\neq x_2$ et $x_1\neq x_2$. On appelle *polynôme d'interpolation de Lagrange* des points M_0, M_1 et M_2 le polynôme L défini par :

$$L(x)=y_0\ell_0(x)+y_1\ell_1(x)+y_2\ell_2(x)$$

où ℓ_0, ℓ_1 et ℓ_2 sont définis sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases}\ell_0(x)=\left(\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\dfrac{x-x_2}{x_0-x_2}\right)\\ \ell_1(x)=\left(\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)\\ \ell_2(x)=\left(\dfrac{x-x_0}{x_2-x_0}\right)\left(\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)\end{cases}$$

1. Évaluer les fonctions ℓ_0, ℓ_1 et ℓ_2 en x_0, x_1 et x_2. Que remarque-t-on ?
2. Calculer $L(x_0)$, $L(x_1)$ et $L(x_2)$.
3. Application : Soit les points $A(1;1)$, $B(2;8)$ et $C(3;27)$.
   (a) Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange L des points A, B et C.
   (b) Calculer $L(x_A)$, $L(x_B)$ et $L(x_C)$.
   (c) Interpréter graphiquement ces derniers résultats.

3 Signe du trinôme

29 Étudier le signe de $f(x)=2x^2+5x-3$.

30 Application : Résolution d'inéquations

1. $-6x^2-10x+3<-4+x$
2. $\dfrac{3x-13}{x^2+x+1}\leqslant -1$
3. $\dfrac{5}{x+7}-\dfrac{2}{2x-1}>\dfrac{7}{9(x-1)}$
4. $\dfrac{2t}{1-t}>\dfrac{t+2}{t}$

Feuille de TD n°1
Réponses ou Solutions

4 Étude des fonctions polynômes du second degré

4.1 Fonction polynôme de degré 2

1 $f : a = 2,\ b = 0,\ c = 1$, $h,$: $a = 3,\ b = -1,\ c = -2$, g est du troisième degré et i est une fonction affine : $i(x) = 2x + 1$.

4.2 Forme canonique

2

1. $2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{15}{2}$
2. $3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{19}{3}$
3. $3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{7}{3}$
4. $0,5\,(x-1)^2$
5. $(x-3)^2+6$
6. $(x+5)^2-20$
7. $3\,(x+2)^2+7$
8. $4\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2 - 25$

3

41. $f(0) = f(6)$, donc par symétrie de la parabole, $\alpha = 3$, comme $y_S = 4$, alors $\beta = 4$ et $a = 1$, donc $\underline{f(x) = (x-3)^2 + 4 = x^2 - 6x + 13}$.
47. La parabole est tournée vers le haut car $a = 1 > 0$, le sommet $S(2;-5)$ et pour finir, par exemple, $f(0) = -1 = f(4)$.

4 $S(3;-7)$

4.3 Variations

5 Sommets

1. $S(3;7)$	2. $S(-1;-3)$	3. $S(0;5)$	4. $S(2;3)$

6 $h \to \mathscr{C}_1$ $\quad f \to \mathscr{C}_2$ $\quad g \to \mathscr{C}_3$

7 Soit x un côté de l'enclos, l'autre côté a pour dimension $10 - x$ pour que le périmètre du rectangle soit de 20 m.
L'aire du domaine est donc de $f(x) = x(10-x) = -x^2 + 10x$. On remarque que f est croissante puis décroissante et, par exemple, comme $f(0) = f(10) = 0$, alors $\alpha = 5$.
Ainsi, l'enclos est d'aire maximale lorsque le côté du rectangle est de 5 m (c'est alors un carré).

4.4 Courbe représentative

8

1. $f(\alpha-h)=f(\alpha+h)=ah^2+\beta$.
2. $\alpha-h$ et $\alpha+h$ sont symétriques par rapport à α, et leurs images $f(\alpha-h)$ et $f(\alpha+h)$ sont égales, et cela, quel que soit le nombre h.
3. Cela prouve qu'il y un axe de symétrie pour la parabole.

9

1. geogeb
2. Soit $M\left(x\,;\,y\right)$.
   (a) $\overrightarrow{MF}\begin{pmatrix}x-3\\y-3\end{pmatrix}$ donc $\underline{MF^2=(x-3)^2+(y-3)^2}$.
   (b) $d(M,\mathscr{D})^2=(y-5)^2$
   (c) $M\in\mathscr{E} \iff (x-3)^2+(y-3)^2=(y-5)^2 \iff x^2-6x+4y-7=0 \iff y=\frac{1}{4}\left(-x^2+6x+7\right)=-\frac{1}{4}(x^2-6x-7)=-\frac{1}{4}(x-3)^2+4$
   (d) Nous avons fait un raisonnement par équivalences et donc
   $$M\in\mathscr{E} \iff y=-\frac{1}{4}(x-3)^2+4$$
   (e) En conclusion, l'ensemble des points équidistants d'un point et d'une droite est une parabole.

   > **Définition 1**
   > On dit que $\mathscr{D}\ :\ y=5$ est la directrice que $F(3\,;3)$ est le foyer de la parabole.

10 1. $y=-\frac{2}{3}(x+1)(x-3)$, 2. $y=2(x-1)(x+2)$, 3. $y=3(x+1)^2-2$, 4. $y=-3(x-1)^2+4$

5 Équations du second degré

5.1 Racine du trinôme

11

1. 1 et $\frac{1}{2}$
2. -1 et 4
3. 0 et $-\frac{3}{2}$
4. 2 et 3

12

1. $x^2+7x-8=(x-1)(x+8)$
2. $2x^2+7x+5=(x+1)(2x+5)$
3. $-3x^2+10x-7=(x-1)(-3x+7)$
4. $-2x^2+8x-8=-2(x-2)^2$

5.2 Résolution

13

1. Comme a et β sont de même signe (parabole tournée vers le bas et un sommet d'ordonnée négative, on peut dire que $\Delta < 0$
2. on peut en déduire que f est toujours négative.

14

1. $\Delta = 16$, $\mathscr{S} = \{3, 1\}$
2. $\Delta = 0$, $\mathscr{S} = \{-1\}$
3. $\Delta = 0$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
4. $\Delta = -7$, $\mathscr{S} = \emptyset$.
5. $\Delta = 144$, $\mathscr{S} = \{-1, 3\}$
6. $\Delta = 52$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{1 \pm \sqrt{13}}{4}\right\}$
7. $\Delta = 100$, $\mathscr{S} = \left\{-\frac{7}{3}, 1\right\}$
8. $\Delta = 0$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

15 Si a et c n'ont pas le même signe, alors le produit ac est négatif, donc $\Delta = \underbrace{b^2}_{\geq 0} \underbrace{-4ac}_{>0} > 0$, donc l'équation admet deux solutions.

16

1. $2x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = \frac{3}{2}$ donc $\mathscr{S} = \left\{\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$.
2. $x^2 + 19 = 12 \iff x^2 = -7$ donc $\mathscr{S} = \emptyset$
3. $x^2 - 4x = 0 \iff x(x-4) = 0$ donc $\mathscr{S} = \{0, 4\}$
4. $6x^2 - x - 1 = 0$. $\Delta = 1 + 4 \times 6 = 25$ donc $\begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3} \end{cases}$
5. $16x^2 - 8x + 13 = 0$, $\Delta = -768 < 0$ donc $\mathscr{S} = \emptyset$.
6. $2x^2 - 10x + \frac{25}{4} = 0$, $\Delta = 50$ donc $\begin{cases} x_1 = \frac{10+5\sqrt{2}}{4} \\ x_2 = \frac{10-5\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

17 L'équation $x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0$ admet une solution unique si et seulement si son discriminant est nul.
Or, $\Delta = (2m+3)^2 - 4m^2 = 12m + 9$ et donc $\Delta = 0 \iff 12m + 9 = 0 \iff m = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}$.

Dans ce cas, l'équation devient $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = 0$ et la solution est $r_0 = -\frac{b}{2a} = \underline{\frac{3}{4}}$.

18

1. $f(1) = 0$, donc 1 est solution de l'équation $f(x) = 0$.

2. Par division, ou identification, on trouve $f(x) = (x-1)(x^2 - x - 6)$
3. Par somme et produit, on voit que les deux autres racines sont -2 et 3. Ce qui nous donne $\underline{\mathscr{S} = \{-2\,,1\,,3\}}$

$\boxed{\textbf{19}}$ $(x-1)(3x-4)$, $(x-2)(x^2+x+1)$, $(x+3)(2x^2-4x-5)$, $(2x-1)(3x^2+x-2)$

$\boxed{\textbf{20}}$

1. En cherchant les racines des deux polynômes proposés, on a :

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) \qquad -3x^2 - 5x + 2 = -3(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (x+2)(1-3x)$$

2. Le domaine de définition de l'équation est $\mathbb{R}\setminus\left\{-2, \frac{1}{3}, 1\right\}$.

$$\begin{aligned}
(E) \qquad & \frac{1}{x^2+x-2} - \frac{2x}{-3x^2-5x+2} = 0 \\
\iff \qquad & \frac{1}{(x-1)(x+2)} - \frac{2x}{(x+2)(1-3x)} = 0 \\
\iff \qquad & \frac{1-3x}{(x-1)(x+2)(1-3x)} - \frac{2x(x-1)}{(x-1)(x+2)(1-3x)} = 0 \\
\iff \qquad & \frac{1-3x-2x(x-1)}{(x-1)(x+2)(1-3x)} = 0 \\
\iff \qquad & 1 - x - 2x^2 = 0
\end{aligned}$$

Car une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul.
Ainsi, en résolvant l'équation, on trouve $\underline{\mathscr{S} = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}}$.

$\boxed{\textbf{21}}$ Soient r_1 et r_2 les deux racines du trinôme. On a alors :

$$f(x) = a(x-r_1)(x-r_2) = ax^2 - a(r_1+r_2)x + ar_1r_2$$

On a donc, par **identification** des deux expressions développées :

$$\left\{\begin{aligned} -a(r_1+r_2) &= b \\ ar_1r_2 &= c \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} r_1 + r_2 &= -\frac{b}{a} \\ r_1r_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}\right.$$

Cela donne des résultats intéressants lorsque $a = 1$, en effet, dans ce cas, $-b$ est la somme des racines et c est le produit des deux racines.

$\boxed{\textbf{22}}$

1. **Calcul de $x_1^2 + x_2^2$**
   (a) À partir de l'identité remarquable, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - \mathbf{2x_1x_2}$
   (b) $x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ca}{a^2}$
2. **Calcul de $x_1^3 + x_2^3$**
   (a) En utilisant l'identité remarquable, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \iff a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$, donc $x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2)$.
   (b) Ainsi, $x_1^3 + x_2^3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3}$

3. **Application**
   Soit P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 - 2x - 1$.
   (a) P admet deux racines réelles x_1 et x_2 car son discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8 > 0$.
   (b) On a donc : $x_1 + x_2 = 2$, $x_1^2 + x_2^2 = 6$ et $x_1^3 + x_2^3 = 8 + 3 \times 2 = 14$.
   (c) Les deux racines étant $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$, on vérifie gentiment tous ces calculs.

23 $\Delta > 0 \iff 16m^2 - 4(m-3)(4m+1) > 0 \iff 44m + 12 > 0 \iff m > -\dfrac{3}{11}$
Solutions :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{11m+3}}{4m+1} \\ x_2 = \dfrac{2 - \sqrt{11m+3}}{4m+1} \end{cases}$$

24 Si les dimensions du triangle initial sont $(a,\ a,\ c)$, avec $\underline{c^2 = 2a^2 \quad (*)}$, alors le nouveau triangle a pour dimensions $(a+12, a, 5c)$, avec $(a+12)^2 + a^2 = 25c^2 \iff a^2 + 24a + 144 + a^2 = 25c^2 \iff 24a + 144 = 24c^2$ par $(*)$, de plus cela est équivalent à $a + 6 = c^2 = 2a^2 \iff 2a^2 - a - 6$.
Cette équation a deux solutions : $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$. Comme une longueur ne peut pas être négative, le triangle de départ a pour dimensions : $\underline{(2, 2, 2\sqrt{2})}$.

25

1. Dans l'équation $x^4 - 16x^2 + 39 = 0$ en posant $X = x^2$, on obtient $X^2 - 16X + 39 = 0$, $\Delta = 100$, $\begin{cases} X_1 = 3 \\ X_2 = 13 \end{cases}$.
   Les solutions en x donnent :
   $$\begin{cases} x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \\ x_{3,4} = \pm\sqrt{13} \end{cases}$$
2. Dans les exemples suivants, on fera attention aux changements de variable et aux restrictions qu'ils entraînent.
   (a) $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$ en posant $X = \cos x$, on obtient $2X^2 - 7X + 3$ et $\Delta = 25$ et donc $\begin{cases} X_1 = 3 \\ X_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$, or, un cosinus est compris entre -1 et 1, donc seul $X = \dfrac{1}{2}$ convient, cela correspond à $\cos x = \dfrac{1}{2} \iff x = \pm\dfrac{\pi}{3}$.
   (b) $5x - 7\sqrt{x} - 6 = 0$ en posant $X = \sqrt{x}$, on obtient $\begin{cases} X_1 = 2 \\ X_2 = -3/5 \end{cases}$ et ainsi, $x = 4$ est la seule solution.

26

3. $\begin{aligned} 5 - x = 3\sqrt{4-x} &\iff (5-x)^2 = 9(4-x) \text{ et } 5 - x > 0 \\ &\iff x^2 - x - 11 = 0 \text{ et } 5 - x > 0 \end{aligned}$ ainsi $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1+3\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \dfrac{1-3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ qui sont toutes les deux valides ($5 - x > 0$ pour les deux).

27

1. $\mathscr{D}_m\ :\ y = mx + h$

2. $x^2-4x+10-mx-h=0$ admet une seule solution si et seulement si $\Delta=0 \iff (-4-m)^2-4\times(10-h)=0 \iff m^2+8m+4h-24=0$
Résolvons cette équation en fonction de h. $\delta=64-16h+96=16(10-h)$ Si $h\geqslant 10$, alors $\delta\geqslant 0$ et l'équation admet deux solutions :

$$\begin{cases} m_1=\dfrac{-8-4\sqrt{10-h}}{2}=-4-2\sqrt{10-h} \\ m_2=\dfrac{-8+4\sqrt{10-h}}{2}=-4+2\sqrt{10-h} \end{cases}$$

3. Ces deux solutions correspondent aux pentes des droites tangentes à la parabole passant par A.

28

1. $\ell_0(x_0)=1$, $\ell_0(x_1)=0$ et $\ell_0(x_2)=0$
$\ell_1(x_0)=0$, $\ell_1(x_1)=1$ et $\ell_1(x_2)=0$
$\ell_1(x_0)=0$, $\ell_2(x_1)=0$ et $\ell_2(x_2)=1$
Donc les fonctions ℓ_i valent 1 en x_i et 0 ailleurs.
2. On a donc $L(x_0)=y_0$, $L(x_1)=y_1$ et $L(x_2)=y_2$.
3. Application : Soit les points $A(1;1)$, $B(2;8)$ et $C(3;27)$.
   (a) On trouve
   $$\begin{cases} \ell_0(x)=\dfrac{(x-2)(x-3)}{2} \\ \ell_1(x)=\dfrac{(x-1)(x-3)}{-1} \\ \ell_2(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{2} \end{cases}$$
   Donc $L(x)=6x^2-11x+6$.
   (b) On remarque que $L(1)=1$, $L(2)=8$ et $L(3)=27$
   (c) La parabole représentant L passe par les trois points A, B et C. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange L des points A, B et C.
   (d) Calculer $L(x_A)$, $L(x_B)$ et $L(x_C)$.
   (e) Interpréter graphiquement ces derniers résultats.

6 Signe du trinôme

29

x	$-\infty$		-3		$1/2$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

30

1. $-6x^2-10x+3<-4+x \iff -6x^2-11x+7<0 \iff x\in\left]-\infty;-\dfrac{7}{3}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$
2. $\dfrac{3x-13}{x^2+x+1}\leqslant -1 \iff \dfrac{x^2+4x-12}{x^2+x+1}\leqslant 0$.
x^2+x+1 a un discriminant négatif, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+x+1>0$, donc le signe de la

fraction est celui du numérateur.

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
$x^2+4x-12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathscr{S}=[-6;2]$.

3. $\dfrac{5}{x+7}-\dfrac{2}{2x-1}>\dfrac{7}{9(x-1)} \iff \dfrac{5(2x-1)9(x-1)}{9(x+7)(2x-1)(x-1)}-\dfrac{2(x+7)9(x-1)}{9(x+7)(2x-1)(x-1)}-\dfrac{7(x+7)(2x-1)}{9(x+7)(2x-1)(x-1)}>0$

$\iff \dfrac{58x^2-334x+220}{9(x+7)(2x-1)(x-1)}>0$ avec $58x^2-334x+220$ qui a deux racines : 5 et $\dfrac{22}{29}$.

x	$-\infty$		-7		$1/2$		$22/29$		1		5		$+\infty$
$58x^2-334x+220$				$+$			0		$-$		0	$+$	
$x+7$		$-$	0					$+$					
$2x-1$				$-$	0				$+$				
$x-1$					$-$				0		$+$		
fraction		$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

La solution est donc $\mathscr{S}=\left]-7;\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{22}{29};1\right[\cup]5;+\infty[$.

4. $\dfrac{2t}{1-t}>\dfrac{t+2}{t} \iff \dfrac{2t}{1-t}-\dfrac{t+2}{t}>0\dfrac{2t^2-(t+2)(1-t)}{t(1-t)}>0 \iff \dfrac{3t^2-t-2}{t(1-t)}>0 \iff \dfrac{(t-1)(3t+2))}{t(1-t)}>0$

1 est une valeur interdite, mais on peut simplifier le problème si $x\neq 1$: $\iff \dfrac{3t+2}{-t}>0$.

$\mathscr{S}=\left]-\dfrac{2}{3};0\right[$