

Calculs et automatismes

Ce document a été réalisé en partie grâce aux cahiers de calculs dont les auteurs sont listés ci-dessous :

Mélissa Bailloeuil-Inglart
Colas Bardavid
Romain Basson
Ménard Bourgade
Van Bien Bui
Alain Camanes
Carole Chabanier
Mathilde Colin de Verdière

Geneviève Davion
Éliane Gayout
Christopher Goyet
Hélène Gros
Benjamin Groux
Jason Lapeyronnie
François Laurent
Blaise Le Meaux

Steven Lu
Lionel Magnis
Quang-Thai Ngo
Anthony Ollivier
Alan Pellé
Nicolas Popoff
Jean-Philippe Spriet
Jérôme Trochon

Table des matières

1 Fractions	2
2 Calcul littéral	4
3 Racines	6
4 Systèmes	8
5 Dérivation	10
6 Primitives	13
7 Calcul d'intégrales	16

Techniques de Calcul

Partie 1

Fractions

► EXERCICE 1

Simplifier les fractions suivantes :

Simplification de fractions

1. $\frac{18}{42}$

4. $\frac{28}{63}$

7. $\frac{22}{88}$

10. $\frac{63}{75}$

13. $\frac{2^4 3^5 7^2}{2^3 3^3 \times 7^4}$

2. $\frac{21}{27}$

5. $\frac{18}{22}$

8. $\frac{49}{84}$

11. $\frac{26}{74}$

14. $\frac{2^3 5^3 3^2 11^2}{33000}$

3. $\frac{25}{40}$

6. $\frac{27}{45}$

9. $\frac{48}{56}$

12. $\frac{72}{81}$

15. $\frac{360}{288}$

► EXERCICE 2

base 1

1. $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

2. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

3. $\frac{25}{15} - \frac{4}{3}$

4. $\frac{16}{4} + \frac{2}{5}$

► EXERCICE 3

Opérations

Effectuer les opérations suivantes, prendre le temps de faire les simplifications dans les produits :

1. $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

10. $2 - \frac{3}{4} \div \frac{5}{2}$

2. $\frac{5}{6} - \frac{7}{15}$

11. $\left(\frac{1}{8} - 1\right) \left(1 - \frac{7}{11}\right) \left(\frac{5}{7} + \frac{1}{3}\right)$

3. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

12. $\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 - \frac{5}{3}$

4. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$

13. $\frac{3}{\frac{4}{5}}$

5. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$

14. $\frac{\frac{3}{4}}{5}$

6. $\frac{5}{12} \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{25}$

15. $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} \times 2$

7. $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$

16. $\frac{5}{3} - \frac{16}{45} \times \frac{35}{8}$

8. $\frac{2}{5} \div \frac{3}{10}$

17. $\frac{5 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{5 - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}}$

9. $\frac{3}{4} \div \frac{15}{28}$

► EXERCICE 4

One more

Effectuer les opérations suivantes :

1. $A = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{7}\right) \times \left(\frac{7}{3} - 1\right)$

4. $D = \left(\frac{7}{5} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{7}{8} - \left(\frac{3}{4} - 2\right)\right)$

2. $B = \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{2}\right) \times \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3}\right)$

5. $E = \left(\frac{1}{9} - \frac{2}{27}\right) \times \frac{54}{5}$

3. $C = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{7}{24}\right) \times \frac{12}{49}$

6. $F = \frac{7}{3} \times \left(\frac{2}{5} - 4\right)$

► EXERCICE 5

Calcul littéral

Réduire les expressions suivantes :

1. $A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

3. $C = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} - \frac{3}{c}$

5. $E = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}$

2. $B = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$

4. $D = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$

6. $F = \frac{1}{a+1} - \frac{1 - \frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a}}$

► EXERCICE 6**Télescopage**1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

2. En déduire la valeur de :

$$E = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{999 \times 1000}$$

► EXERCICE 7

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible. Il sera utile d'utiliser le calcul littéral.

1. $A = (2 \times 3 \times 5 \times 7) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right)$

3. $C = \frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$

2. $B = \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10} \right) \times \frac{21}{24}$

4. $D = \frac{1978 \times 1979 + 1980 \times 21 + 1958}{1980 \times 1979 - 1978 \times 1979}$

► EXERCICE 8

**

Écrire sous la forme d'une fraction irréductible

$$A = \frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$$

► EXERCICE 9

*** En utilisant le calcul littéral

En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

1. $\frac{2\,022}{(-2022)^2 + (-2021)(2023)}$

3. $\frac{1235 \times 2469 - 1234}{1234 \times 2469 + 1235}$

2. $\frac{2021^2}{2020^2 + 2022^2 - 2}$

4. $\frac{4002}{1000 \times 1002 - 99 \times 1001}$

► EXERCICE 10

*** Encore du calcul littéral

Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule fraction, que l'on simplifiera le plus possible.

1. $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

3. $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

2. $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$, avec $a \neq b$.

Techniques de Calcul

Partie 2

Calcul littéral

Dans cette fiche, on s'appliquera à écrire le résultat en écrivant le moins d'étapes possibles. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Développements

► EXERCICE 1

Développements

Développer les expressions suivantes et les ordonner en fonction des puissances décroissantes de x (quand c'est possible).

- | | | | |
|--|-----------------|-----------------------------------|-----------------------------|
| 1. $(2x - 3)(4 + x)$ | 5. $(3x + 1)^2$ | 10. $(5x - 2)^2$ | 15. $(a - 1)(b - 1)$ |
| 2. $(5x + 1)\left(\frac{1}{3} - 2x\right)$ | 6. $(2x - 1)^2$ | 11. $(x - 3)(x^2 - 2x + 1)$ | 16. $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$ |
| 3. $(2x + 1)^2$ | 7. $(3x - 1)^2$ | 12. $(x - 2)(x^2 + 3x + 4)$ | 17. $(a - 1)^2$ |
| 4. $(x - 4)^2$ | 8. $(x + 4)^2$ | 13. $(x + 4)(x + 5) - x^2(x + 1)$ | 18. $(a + 1)(b + 1)$ |
| | 9. $(5x + 2)^2$ | 14. $x^2 + 6x + 9 - (x - 3)^2$ | |

► EXERCICE 2

Développer les expressions suivantes :

- | | | | |
|--------------------|------------------------|----------------|----------------|
| 1. $(a + b + c)^2$ | 3. $(a - b - c)^2$ | 5. $(a + b)^3$ | 7. $(a + b)^4$ |
| 2. $(a + b - c)^2$ | 4. $(a + b + c + d)^2$ | 6. $(a - b)^3$ | 8. $(a - b)^4$ |

► EXERCICE 3

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances croissantes de x .

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$ | 4. $(x + 1)^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$ |
| 2. $(x - 1)^3(x^2 + x + 1)$ | 5. $(x - 1)^2(x + 1)(x^2 + x + 1)$ |
| 3. $(x + 1)^2(x - 1)(x^2 - x + 1)$ | 6. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ |

► EXERCICE 4

Même consigne.

- | | |
|---|---|
| 1. $(x - 2)^2(-x^2 + 3x - 1) - (2x - 1)(x^3 + 2)$ | 4. $(x + 1)(x - 1)^2 - 2(x^2 + x + 1)$ |
| 2. $(2x + 3)(5x - 8) - (2x - 4)(5x - 1)$ | 5. $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ |
| 3. $((x + 1)^2(x - 1)(x^2 - x + 1) + 1)x - x^6 - x^5 + 2$ | 6. $(x^2 + x + 1)^2$ |

Factorisations**► EXERCICE 5****Factorisations**

Factoriser les expressions polynomiales de la variable x suivantes.

1. $-(6x + 7)(6x - 1) + 36x^2 - 49$

3. $(6x - 8)(4x - 5) + 36x^2 - 64$

2. $25 - (10x - 3)^2$

4. $(-9x - 8)(8x + 8) + 64x^2 - 64$

► EXERCICE 6**Degré 2**

En utilisant les connaissances sur les polynômes de degré 2, factoriser les trinômes suivants.

1. $x^2 - 2x + 1$

4. $-5x^2 + 6x - 1$

2. $x^2 + 4x + 4$

5. $6x^2 - 17x + 5$

3. $x^2 + 3x + 2$

6. $5x^2 - 7x - 6$

► EXERCICE 7

On rappelle l'identité de factorisation :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Factoriser les expressions suivantes :

1. $a^7 - b^7$

3. $a^3 - 8$

5. $2^{10} - 1$

7. $x^{ab} - 1$ de deux façons différentes.

2. $a^7 - 1$

4. $a^3 + 8$

6. $3^n - 1$

Application : Montrer que $7^n - 1$ est divisible par 6 quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

► EXERCICE 8**Avec plusieurs variables**

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

1. $(x + y)^2 - z^2$

5. $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$

2. $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$

6. $y^2(a^2 + b^2) + 16x^4(-a^2 - b^2)$

3. $xy + x + y + 1$

7. $x^4 + x^2 + 1$

4. $xy - x - y + 1$

8. $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

9. $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$

Techniques de Calcul

Partie 3

Racines

► EXERCICE 1

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \sqrt{(-5)^2}$

4. $D = \sqrt{(3 - \pi)^2}$

9. $I = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$

2. $B = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$

5. $E = \sqrt{32} \times \sqrt{2}$

10. $J = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}}$

3. $C = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$

6. $F = \sqrt{3}\sqrt{27}$

7. $G = \sqrt{3} \times \sqrt{18} \times \sqrt{6}$

11. $K = \frac{\sqrt{32} \times \sqrt{10}}{\sqrt{80}}$

8. $H = (4\sqrt{5})^2$

► EXERCICE 2

Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux entiers et b le plus petit possible :

1. $A = \sqrt{32}$

2. $B = \sqrt{45}$

3. $C = 3\sqrt{125}$

Simplifier le nombre $\sqrt{45} + 3\sqrt{125}$.

► EXERCICE 3

Développer puis écrire sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec a , b et c entiers et c le plus petit possible :

1. $A = (\sqrt{3} - 4)^2$

3. $C = (3\sqrt{2} - \sqrt{5})(3\sqrt{2} + \sqrt{5})$

2. $B = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2$

4. $(3 + \sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})$

► EXERCICE 4

Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

1. $(2\sqrt{5})^2$

6. $(\sqrt{2\sqrt{3}})^4$

2. $(2 + \sqrt{5})^2$

3. $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

7. $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$

4. $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

5. $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$

8. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

► EXERCICE 5

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

1. $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$

5. $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

2. $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$

6. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

3. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

7. $\frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

4. $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

8. $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$

► **EXERCICE 6**

Exprimer la quantité suivante sans radical au dénominateur.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

► **EXERCICE 7****Mettre au carré**

Élever au carré les quantités suivantes pour en donner une expression simplifiée.

1. $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$

2. $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

► **EXERCICE 8**

On note $A = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$. Simplifier A .

On commencera par exprimer A^3 en fonction A .

► **EXERCICE 9****Et suites arithmétiques**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{u_k} + \sqrt{u_{k+1}}} = \frac{1}{\sqrt{u_0} + \sqrt{u_1}} + \frac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \frac{n+1}{\sqrt{u_0} + \sqrt{u_{n+1}}}$$

Techniques de Calcul

Partie 4

Systèmes

► EXERCICE 1

Résolution de systèmes de 2 équations à 2 inconnues

- Pour chacun des systèmes suivants, discuter de l'existence de solutions.
- Résoudre les systèmes admettant une solution unique par la méthode de votre choix : substitution ou combinaison.

$$\text{a. } \begin{cases} 2x - 3y = 15 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 5y = -3 \end{cases}$$

$$\text{g. } \begin{cases} 9x - 6y = 1 \\ -8x + 6y = -3 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} 2x - 8y = 4 \\ -3x + 12y = -6 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} x - 6y = 13 \\ 6x - 7y = 20 \end{cases}$$

$$\text{h. } \begin{cases} -10x + 9y = 10 \\ 10x + 3y = -8 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 6x + 9y = 4 \\ -8x - 12y = 8 \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} -3x - 9y = 6 \\ 2x - 7y = 5 \end{cases}$$

$$\text{i. } \begin{cases} 7x + 8y = -27 \\ y - 10x = 6 \end{cases}$$

► EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$

$$1. \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6x + 2y = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

► EXERCICE 3

Systèmes à paramètre

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

$$1. \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases}$$

► EXERCICE 4

Système à paramètre

Discuter des solutions du système (S) d'inconnues x et y suivant les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$

$$(S) \begin{cases} (m+2)x + y = m \\ (m-10)x + (m-4)y = -3m \end{cases}$$

► EXERCICE 5

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

2 équations à 3 inconnues

$$1. \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x - y + 3z = 5/2 \\ x + 2y - z = 3/2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 5x + y + 2z = -5/2 \\ 2x - y + 2z = -5/3 \end{cases}$$

► EXERCICE 6

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

3 équations à 3 inconnues

$$1. \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} a - b - c = -7 \\ 3a + 2b - c = 3 \\ 4a + b + 2c = 4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x + y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$$

► EXERCICE 7**Système à paramètre**

On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$. et de paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases}$$

Discuter de l'ensemble des solutions selon les valeurs de a .

► EXERCICE 8**Vers le second degré**

Résoudre le système d'inconnue $(x; y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} xy = -5 \\ x^2 + xy^2 = 20 \end{cases}$$

Indic : trouver le produit et la somme des solutions.

Techniques de Calcul

Partie 5

Dérivation

► EXERCICE 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = 4x$

2. $f_2(x) = 5x + 3$

3. $f_3(x) = x^3$

4. $f_4(x) = e$

5. $f_5(x) = 3x^2 - 5x + 1$

6. $f_6(x) = 5x^3 + 2x^2 - 7x + 4$

7. $f_7(x) = 3x^7 - 4x^2 + 5$

8. $f_8(x) = 2x^5 + x^3 + 5x - 1$

9. $f_9(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

10. $f_{10}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$

11. $f_{11}(x) = \frac{1}{x}$

► EXERCICE 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = 0,03x^4 - \sqrt{5}x^2 - x + 1$

2. $f_2(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4$

3. $f_3(x) = \frac{1}{x} - 4x^2 + 5x$

4. $f_4(x) = \sqrt{x}$

5. $f_5(x) = 3\sqrt{x} - 5x$

6. $f_6(x) = \frac{3}{x} - 6x$

7. $f_7(x) = \frac{1}{2x} - 5x + 1$

8. $f_8(x) = x^2 - 2\sqrt{x}$

9. $f_9(x) = \frac{1}{x^5}$

10. $f_{10}(x) = e^{-3x}$

► EXERCICE 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 4x^3 + 5x^4$

2. $f_2(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

3. $f_3(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

4. $f_4(x) = 3e^{3x} + \frac{1}{x}$

5. $f_5(x) = \frac{e^{3x}}{3} + \frac{2}{x}$

6. $f_6(x) = 3e^{2x} - (4x)^4$

7. $f_7(x) = \frac{e^{3x}}{4} + \frac{3}{10} \ln(x) + 3\sqrt{x}$

8. $f_8(x) = (e^{5x})^2 + \frac{2}{x} - (3x)^4$

► EXERCICE 4

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = -5x^2 + 2x$

2. $f_2(x) = 4x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 12$

3. $f_3(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

4. $f_4(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

5. $f_5(x) = \frac{x}{x + 1}$

6. $f_6(x) = \frac{2x - 1}{3x + 2}$

$$7. f_7(x) = \frac{5-4x}{x^2+1}$$

$$8. f_8(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$$

$$9. f_9(x) = x\sqrt{x}$$

► EXERCICE 5

Même Consigne.

Produits - Quotients - Puissances - Mix 1

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $f_1(x) = 4x^2 - 3x + 1$ | 18. $f_{18}(x) = \frac{1}{x+1}$ | 31. $f_{31}(x) = \frac{1}{x^3}$ |
| 2. $f_2(x) = 2x - 4 + \frac{3}{x}$ | 19. $f_{19}(x) = \frac{1}{1+x^2}$ | 32. $f_{32}(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$ |
| 3. $f_3(x) = -2x^3 + x^2$ | 20. $f_{20}(x) = \frac{1}{1-3x}$ | 33. $f_{33}(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^3$ |
| 4. $f_4(x) = x - 1 + \sqrt{x}$ | 21. $f_{21}(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ | 34. $f_{34}(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{3-x}$ |
| 5. $f_5(x) = 2x + 7 + \frac{1}{x}$ | 22. $f_{22}(x) = 2x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ | 35. $f_{35}(x) = (x+1)e^{2x}$ |
| 6. $f_6(x) = 2 + (3x+2)^2$ | 23. $f_{23}(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ | 36. $f_{36}(x) = (x+1)\ln(x)$ |
| 7. $f_7(x) = (2x+3)(3x-7)$ | 24. $f_{24}(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$ | 37. $f_{37}(x) = (x^2+1)e^{3x}$ |
| 8. $f_8(x) = (5x-4)\left(1-\frac{x}{2}\right)$ | 25. $f_{25}(x) = \frac{2x^2-5x+3}{x-3}$ | 38. $f_{38}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ |
| 9. $f_9(x) = (x^3-x)(x-9)$ | 26. $f_{26}(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$ | 39. $f_{39}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ |
| 10. $f_{10}(x) = \sqrt{x}(3-4x)$ | 27. $f_{27}(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ | 40. $f_{40}(x) = \frac{x^2+2xe^x+1}{1+x^2}$ |
| 11. $f_{11}(x) = \left(2x+\frac{1}{x}\right)(3x-1)$ | 28. $f_{28}(x) = \frac{x-1}{x(x+1)}$ | 41. $f_{41}(x) = (3x+2)^2$ |
| 12. $f_{12}(x) = \left(\frac{1}{2}-\frac{x}{10}\right)^2$ | 29. $f_{29}(x) = \left(\frac{x-1}{3-x}\right)^2$ | 42. $f_{42}(x) = \frac{1}{5x+2}$ |
| 13. $f_{13}(x) = (3x-1)^5$ | 30. $f_{30}(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ | 43. $f_{43}(x) = \ln(12x+3)$ |
| 14. $f_{14}(x) = x^2(1+\sqrt{x})$ | | 44. $f_{44}(x) = \frac{1}{(5-2x)^4}$ |
| 15. $f_{15}(x) = \left(\frac{1}{x}+2\right)(\sqrt{x}+1)$ | | 45. $f_{45}(x) = (3x+2)^2e^{4x+5}$ |
| 16. $f_{16}(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$ | | 46. $f_{46}(x) = (x+e)^4 + 3(3x+2)^3$ |
| 17. $f_{17}(x) = \frac{3x-7}{2-5x}$ | | |

► EXERCICE 6

Dérivée seconde

- On considère la fonction $f : x \mapsto x \ln(1+x)$. Déterminer :
 - l'expression de $f'(x)$
 - l'expression de $f''(x)$
- On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$. Déterminer :
 - l'expression de $f'(x)$
 - l'expression de $f''(x)$
- On considère la fonction $f : x \mapsto x + 1 - \frac{x}{e^x}$. Déterminer :
 - l'expression de $f'(x)$
 - l'expression de $f''(x)$

► EXERCICE 7

Fonctions circulaires

Même consigne. On pourra observer que toutes les fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

- | | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|---|
| 1. $f_1(x) = -\cos x + \sin x$ | 4. $f_4(x) = \cos^2 x$ | 7. $f_7(x) = \frac{1}{2-\cos x}$ |
| 2. $f_2(x) = x + \sin x$ | 5. $f_5(x) = \cos x \sin x$ | 8. $f_8(x) = \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$ |
| 3. $f_3(x) = \sin^2 x$ | 6. $f_6(x) = (\cos x + \sin x)^2$ | |

► **EXERCICE 8****Composées**

Même consigne.

1. $f_1(x) = \sqrt{2x+5}$

2. $f_2(x) = \sqrt{2-x}$

3. $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

4. $f_4(x) = \sin 2x$

5. $f_5(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

6. $f_6(x) = \sin\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

7. $f_7(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

8. $f_8(x) = \sin x \cos 3x$

9. $f_9(x) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$

► **EXERCICE 9****ln et exp**

Même consigne. On pourra déterminer les ensembles de dérivabilité en amont.

1. $f_1(x) = \ln(3x-2)$

2. $f_2(x) = \ln(x^2-1)$

3. $f_3(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$

4. $f_4(x) = \ln(\ln(x))$

5. $f_5(x) = x \ln x - x$

6. $f_6(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

7. $f_7(x) = e^{5x}$

8. $f_8(x) = e^{4-x}$

9. $f_9(x) = e^{\cos x}$

10. $f_{10}(x) = e^{x^2+5x}$

11. $f_{11}(x) = 3^x$

12. $f_{12}(x) = \frac{1}{2^x}$

13. $f_{13}(x) = 5^{\sqrt{x}}$

14. $f_{14}(x) = x^x$

15. $f_{15}(x) = x^2 e^{-x^2}$

16. $f_{16}(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

17. $f_{17}(x) = e^{\frac{1}{x}}$

18. $f_{18}(x) = (x^2+1)^{0,2}$

19. $f_{19}(x) = \sqrt[3]{x^2+x+1}$

20. $f_{20}(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}$

21. $f_{21}(x) = \ln(e^x-3)$

22. $f_{22}(x) = e^{-2e^{-5x}}$

► **EXERCICE 10**Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$.1. Calculer $f'(x)$ sous la forme d'une somme.2. Pour $x \neq 1$, exprimer $f(x)$ sous la forme d'un quotient de polynômes.3. En déduire, pour $x \neq 1$, une expression de $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ sous forme de fraction.► **EXERCICE 11****Dérivées successives**Étant donné une fonction f , on note (sous réserve d'existence) f' , f'' , f''' puis $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, $f^{(6)}$, etc... les dérivées successives de f . En général, la dérivée n -ième est notée $f^{(n)}$.On considère la fonction f définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \frac{1}{3-2x}.$$

Déterminer les expressions de :

1. $f'(x)$

2. $f''(x)$

3. $f^{(3)}(x)$

4. $f^{(4)}(x)$

5. $f^{(5)}(x)$

6. $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pourra conjecturer et démontrer cette égalité par récurrence.

Techniques de Calcul

Partie 6

Primitives

Par souci de commodité d'écriture, on associera la fonction à primitiver avec son expression littérale.

► EXERCICE 1

Déterminer les primitives des expressions suivantes.

1. $3x^2 - 1$

4. $\frac{7}{3}(1 + x + x^2)$

6. $\frac{1}{\sqrt{x}} + 4x$

8. $5e^x - 6$

2. $-3x^{-4} - 4x^{-5}$

9. $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - x + 1$

3. $\frac{1}{2}x^3 - 3x^5 + 2$

5. $\frac{1}{x^3}$

7. $\frac{-2}{x^4}$

10. $f(x) = -3e^x + x^2 - 2x$

► EXERCICE 2

Fonction inverse

Déterminer les primitives des expressions suivantes :

1. $\frac{2}{(x-2)^2}$

4. $\frac{-9}{(x-7)^{10}}$

8. $f(x) = -3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

2. $\frac{6}{(2x-1)^3}$

5. $\frac{7}{(-x-3)^{-5}}$

9. $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{3}{\sqrt{x}}$

3. $-\frac{3}{(1+4x)^2}$

6. $\frac{6}{(3x-1)^{-3}} + \frac{2}{(x-2)^2}$

10. $f(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^4} - \frac{2}{x^5} + \frac{2}{x}$

► EXERCICE 3

Donner l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes sur l'intervalle I .

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ avec $I = \mathbb{R}_+^*$

2. $f(x) = \frac{1}{x}$ avec $I = \mathbb{R}_-^*$

3. Donner une expression des primitives de $x \mapsto \frac{1}{x}$ valable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

► EXERCICE 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{(x^2 - 1)^3}$.

1. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, calculer $\frac{1}{2(x-1)^3} - \frac{1}{2(x+1)^3}$

2. En déduire l'expression, sous la forme d'une fraction, des primitives de f

► EXERCICE 5

Donner l'expression de la primitive F de f telle que $F(a) = b$ dans les cas suivants.

1. $f(x) = 2x + 1$, $a = 1$ et $b = 0$

3. $f(x) = \frac{3}{x}$, $a = 2$ et $b = 0$

2. $f(x) = \frac{2}{x}$, $a = 1$ et $b = 3$

4. $f(x) = x^2 - e^x + 3$, $a = 0$ et $b = \frac{1}{2}$

► EXERCICE 6

Déterminer les primitives des expressions suivantes en faisant apparaître une dérivée

1. xe^{x^2}
2. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$
3. $(x-1)^2$
4. $(3x-2)^5$
5. $2xe^{x^2+x-3} + e^{x^2+x-3}$
6. $5(3x^2-2)(x^3-2x+1)^4$
7. $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-5}}$

► EXERCICE 7

Idem

1. $-xe^{-3x^2+1} + 1$
2. $5e^x(e^x+1)^4$
3. $\frac{e^x}{(e^x+5)^2}$
4. $\frac{e^x+2x}{2\sqrt{e^x+x^2}}$
5. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
6. $(2e^{2x} - e^{-x})(e^{2x} + e^{-x})^2$
7. $f(x) = 2x \exp(x^2)$
8. $f(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+1}}$
9. $f(x) = 6(8x-2) \times (4x^2-2x-3)^5$
10. $f(x) = -2 \times \frac{-12x+1}{(-6x^2+x)^3}$
11. $f(x) = \frac{6x+5}{3x^2+5x-1}$
12. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$
13. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x})^4$
14. $f(x) = \frac{\exp(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$
15. $f(x) = \frac{2x+1}{(3x^2+3x-9)^5}$
16. $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$
17. $f(x) = \frac{1}{x \ln(3x)}$

► EXERCICE 8

On considère la fonction f , définie sur $] -1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-4}{\sqrt{x+1}}$.

1. Déterminer l'expression des primitives F de f
2. Déterminer une expression de la dérivée de $x \mapsto F(2x+1)$
3. Déterminer l'expression des primitives de la fonction $x \mapsto f(2x+1)$

► EXERCICE 9

1. Donner l'expression des primitives de f définie par $f(x) = \exp(x)$
2. En déduire l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes.

(a) $f_1(x) = \exp(2x+3)$

(b) $f_2(x) = \exp(-5x+2)$

(c) $f_3(x) = \exp\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right)$

(d) $f_4(x) = \exp\left(\frac{-1}{3}x + 2\right)$

► EXERCICE 10

1. Donner l'expression des primitives de f définie par $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
2. En déduire l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes.

(a) $f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x+5}}$

(b) $f_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}x-4}}$

(c) $f_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{6}{5}x-3}}$

(d) $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}x}}$

► EXERCICE 11

1. Donner l'expression des primitives de f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$
2. En déduire l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes.

1. $f_1(x) = \frac{1}{x-3}$

2. $f_2(x) = \frac{1}{2x+1}$

3. $f_3(x) = \frac{1}{\frac{1}{7}x-6}$

4. $f_4(x) = \frac{1}{\frac{2}{3}x+5}$

► EXERCICE 12

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

1. Calculer $f_2(2)$
2. Pour $n \geq 1$, calculer f'_n
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire une primitive de f_n

► EXERCICE 13

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, on considère g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}$.

1. Pour $n \geq 1$, calculer g'_n
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire une primitive de g_n

Techniques de Calcul

Partie 7

Calcul d'intégrales

► EXERCICE 1

Calculer :

1. $\int_0^1 t dt$

4. $\int_2^5 \pi dx$

7. $\int_{-1}^0 e^x dx$

10. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

2. $\int_0^1 2t^2 dt$

5. $\int_{-1}^3 u du$

8. $\int_{-1}^2 3t^3 dt$

11. $\int_2^3 \frac{-3}{t^2} dt$

3. $\int_0^1 (-t+1) dt$

6. $\int_0^1 x^2 dx$

9. $\int_1^2 \frac{x^4}{2} dx$

► EXERCICE 2

Calculer :

1. $\int_{-2}^1 (3x^2 - 5x + 1) dx$

3. $\int_0^1 e^{4x} dx$

5. $\int_{-1}^1 (2x+1)^2 dx$

2. $\int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} + \frac{1}{2} \right) dx$

4. $\int_0^1 e^{4x-1} dx$

6. $\int_1^4 \frac{3}{\sqrt{2x+1}} dx$

► EXERCICE 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien vaut $\int_0^1 t^n dt$?

a. $n+1$

b. $n-1$

c. $\frac{1}{n}$

d. $\frac{1}{n+1}$

e. $\frac{1}{n-1}$

► EXERCICE 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

1. $\int_{-1}^1 t^n dt$

2. $\int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt$

3. $1 - \int_0^1 nt^n dt$

4. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} t^n dt$

5. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^{2n}}{2^n} dt$

► EXERCICE 5

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et soit $a > 0$. Calculer :

1. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^n} dt$

2. $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{t^n} dt$

3. $\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{t^n} dt$

4. $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{t^{2n}} dt$

► EXERCICE 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\int_0^2 \left(\frac{t^3}{2} \right)^n dt$

2. Calculer $\int_0^{2^n} nt^{2n-1} dt$

► EXERCICE 7

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\int_0^2 2t dt + \int_0^2 3t^2 dt + \int_0^2 4t^3 dt + \dots + \int_0^2 (n+1)t^n dt$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Calculer $\frac{n}{\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t^n} dt}$

► EXERCICE 8

Calculer :

1. $\int_0^1 2x(x^2 - 1) dx$

4. $\int_{-1}^1 (4x - 3)(4x^2 - 6x + 3)^3 dx$

7. $\int_3^4 \frac{x-1}{x^2(x-2)^2} dx$

2. $\int_0^1 xe^{x^2} dx$

5. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

8. $\int_{-1}^0 \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3} dx$

3. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt$

6. $\int_{-1}^1 \exp(t + e^t) dt$

► EXERCICE 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{2x} + 3e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$.

1. À l'aide d'une identité remarquable, factoriser $e^{2x} + 2e^x + 1$

2. En déduire la valeur de $\int_0^1 f(x) dx$

► EXERCICE 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 3}{(x+1)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$.

2. En déduire $\int_0^1 f(x) dx$

► EXERCICE 11

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $\int_{-1}^x f(t) dt = -6x^3 - 8x^2 - 3x - 1$.

Calculer $F(x) = \int_x^2 f(t) dt$

► EXERCICE 12

Calcul d'une intégrale par décomposition

1. Trouver deux réels a et b qui rendent les égalités suivantes vraies.

(a) $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1}$

(b) $\frac{1}{t(t+2)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+2}$

2. À l'aide des résultats précédents, calculer les intégrales suivantes.

(a) $\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)} dt$

(b) $\int_2^3 \frac{1}{t(t+2)} dt$

► EXERCICE 13

Idem

1. Trouver deux réels a et b qui rendent les égalités suivantes vraies.

(a) $\frac{t+3}{(t+1)(t+2)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+2}$

(b) $\frac{t+2}{t(t-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1}$

2. À l'aide des résultats précédents, calculer les intégrales suivantes.

(a) $\int_{-4}^{-3} \frac{t+3}{(t+1)(t+2)} dt$

(b) $\int_2^3 \frac{t+2}{t(t-1)} dt$

► EXERCICE 14

IPP

Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

1. $\int_0^1 te^t dt$

3. $\int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2} dt$

5. $\int_0^{10} (2t+1)e^{-t} dt$

2. $\int_1^e t \ln(t) dt$

4. $\int_1^e t^2 \ln(t) dt$

6. $\int_{-\frac{1}{3}}^0 (4-3t)e^{3t+1} dt$

► EXERCICE 15**Primitives du logarithme**

Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

1. $\int_1^5 \ln(t) dt$

2. $\int_e^x \ln(t) dt$ avec $x > 0$

3. $\int_1^5 (\ln(t))^2 dt$

4. $\int_1^5 (\ln(t))^3 dt$

► EXERCICE 16**Doubles IPP**

Calculer à l'aide de deux intégrations par parties :

1. $\int_0^1 t^2 e^t dt$

2. $\int_1^e t^2 (\ln(t))^2 dt$

3. $\int_0^1 t^2 e^{2t+1} dt$

4. $\int_1^7 \frac{(\ln(t))^2}{t^3} dt$

► EXERCICE 17**Intégrales à paramètres**Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.1. Calculer I_0 2. Trouver a et b tels que $\frac{t}{1+t} = a + \frac{b}{1+t}$ 3. Calculer I_1 4. Exprimer $I_{n+1} + I_n$ en fonction de n 5. En déduire la valeur de I_3