

Corrigé du T. D. B13 Déterminants

① Vérifier la formule $\det AB = \det BA$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule grâce à la règle de l'alpha :

$$\det A = 10 - (-2) = 12 \quad \text{et} \quad \det B = 4 - 0 = 4$$

Les produits sont :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 19 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Leurs déterminants sont :

$$\det(AB) = 10 - (-38) = 48 \quad \text{et} \quad \det(BA) = -8 - (-56) = 48$$

On a bien dans les deux cas :

$$\det(AB) = \det A \det B \quad \text{et} \quad \det(BA) = \det B \det A$$

② Calculer les déterminants suivants en utilisant :

- des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes,
- un développement par rapport à une colonne,
- un développement par rapport à une ligne,
- la règle de Sarrus.

$$\begin{aligned} d_1 &= \begin{vmatrix} -14 & 0 & 13 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix} & d_2 &= \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} & d_3 &= \begin{vmatrix} 12 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} & d_4 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ d_5 &= \begin{vmatrix} 2 & -34 & 1 \\ 0 & 15 & 27 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} & d_6 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} & d_7 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 15 \\ 3 & 7 & 15 & 30 \end{vmatrix} & d_8 &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \end{aligned}$$

- Le déterminant d_1 est nul car une de ses colonnes est nulle. On peut aussi le voir par développement par rapport à la colonne 2 ou par la règle de Sarrus :

$$d_1 = \begin{vmatrix} -14 & 0 & 13 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$$

- Le déterminant d_2 est nul car deux lignes sont égales. On peut aussi le voir par développement par rapport à la ligne 3 :

$$d_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 0 = 0$$

- Pour le déterminant d_3 on peut développer par rapport à la deuxième colonne :

$$d_3 = \begin{vmatrix} 12 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 0 = -1$$

On peut aussi appliquer la règle de Sarrus :

$$d_3 = \begin{vmatrix} 12 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 1 = -1$$

- Pour le déterminant d_4 toutes les méthodes sont efficaces. Par exemple avec la règle de Sarrus :

$$d_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 1 - 1 - 0 - 0 = 1$$

- Le déterminant d_5 est triangulaire donc son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux :

$$d_5 = \begin{vmatrix} 2 & -34 & 1 \\ 0 & 15 & 27 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 2 \times 15 \times 10 = 300$$

Ceci se voit aussi avec la règle de Sarrus, ou en développant par rapport à la première colonne ou la troisième ligne.

- Pour le déterminant d_6 la règle de Sarrus et les développements nécessitent des calculs. Par exemple le développement par rapport à la troisième colonne est :

$$\begin{aligned} d_6 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times 3 - 6 \times (-3) + 9 \times (-3) = 9 + 18 - 27 = 0 \end{aligned}$$

Il est plus simple d'utiliser le pivot de Gauss. Ici on applique les opérations $(C_3 \leftarrow \frac{1}{3}C_3)$, puis $(C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1)$ et $(C_3 \leftarrow C_3 - C_1)$, et on constate que deux colonnes sont proportionnelles :

$$d_6 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Quoi qu'il en soit, ce déterminant est nul. Ceci montre que ses trois colonnes sont liées, ou que ses trois lignes sont liées.

On constate effectivement que $L_3 = L_1 + L_2$, et pour les colonnes : $C_1 + C_3 = 2C_2$.

- On applique les opérations $(L_4 \leftarrow L_4 - L_3)$, $(L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2)$, $(L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1)$:

$$d_7 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 15 \\ 3 & 7 & 15 & 30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 15 \end{vmatrix}$$

Ensuite les opérations $(L_4 \leftarrow L_4 - L_2)$, $(L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1)$ donnent :

$$d_7 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Les permutations $(L_1 \leftrightarrow L_2)$ et $(L_3 \leftrightarrow L_4)$ multiplient toutes les deux le déterminant par -1 , donc :

$$d_7 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Il s'agit d'un déterminant d'une matrice diagonale donc $d_7 = 1$.

- Pour le calcul de d_8 la somme des lignes, c'est-à-dire les opérations $(L_1 \leftarrow L_1 + L_2)$, $(L_1 \leftarrow L_1 + L_3)$, $(L_1 \leftarrow L_1 + L_4)$ donnent :

$$d_8 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & a+3 & a+3 & a+3 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Ensuite les opérations $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$, $(L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$, $(L_4 \leftarrow L_4 - L_1)$ donnent :

$$d_8 = (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$$

Ceci montre que ce déterminant est nul si $a = 1$, ce qui est évident, mais aussi si $a = -3$, ce qui se vérifie car alors la somme des colonnes est nulle.

③ Dans \mathcal{S}_3 on note $\tau = (1\ 2)$ et $\sigma = (1\ 2\ 3)$.

- Calculer $\tau\sigma$, $\sigma\tau$, σ^2 .
- Vérifier que tous les éléments de \mathcal{S}_3 sont ainsi obtenus.
- Vérifier que $\tau_1 = (1\ 2)$ et $\tau_2 = (2\ 3)$ permettent aussi d'obtenir tous les éléments de \mathcal{S}_3 .

a. On obtient $\tau\sigma = (2\ 3)$, $\sigma\tau = (1\ 3)$, $\sigma^2 = (1\ 3\ 2)$.

b. L'ensemble \mathcal{S}_3 contient $3! = 6$ éléments, ils sont donc au complet :

$$\mathcal{S}_3 = \{e, \tau, \tau\sigma, \sigma\tau, \sigma, \sigma^2\}$$

c. On constate que $\tau_1\tau_2 = \sigma$, donc d'après la question précédente on peut obtenir tous les éléments de \mathcal{S}_3 avec τ_1 et τ_2 .

On peut aussi remarquer que $\tau_1 = \tau$, $\tau_2 = \tau\sigma$, donc $\tau_1\tau_1 = \tau^2\sigma = \sigma$.

④ On note :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & 5 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Calculer $\tau\sigma$, puis les signatures de σ , τ et $\tau\sigma$.

On obtient $\sigma = (1\ 5\ 4)(2\ 7\ 8\ 3\ 6)$ de signature 1
 $\tau = (2\ 3)(4\ 8\ 7)$ de signature -1
 $\tau\sigma = (1\ 5\ 8\ 2\ 4)(3\ 6)$ de signature -1 .

En effet la signature d'un cycle de longueur p est $(-1)^{p-1}$.

⑤ Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

- Soit τ une transposition de \mathcal{S}_n . Démontrer que l'application $\sigma \mapsto \tau\sigma$ réalise une bijection de \mathcal{S}_n .
- En déduire que \mathcal{S}_n possède autant de permutations de signature 1 que de permutations de signature -1 .
Vérifier ceci avec \mathcal{S}_3 et \mathcal{S}_4 .

a. Soit $f : \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_n$
 $\sigma \longmapsto \tau\sigma$

Cette application est bien définie car la composée de deux permutations de \mathcal{S}_n est une permutation de \mathcal{S}_n . De plus, comme $\tau^2 = e$ alors $f \circ f = \text{Id}_{\mathcal{S}_n}$, donc f est bijective, égale à sa propre réciproque.

b. On note \mathcal{A}_n l'ensemble des permutations de signature 1.

Alors pour tout $\sigma \in \mathcal{A}_n$, la signature de $\tau\sigma$ est :

$$\varepsilon(\tau\sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma) = (-1) \times 1 = -1$$

Ceci car la signature est un morphisme de groupes de (\mathcal{S}_n, \circ) dans $(\{\pm 1\}, \times)$.

On en déduit que $f(\mathcal{A}_n)$ est l'ensemble des permutations de signature -1 .

De plus comme f est bijective alors les ensembles \mathcal{A}_n et $f(\mathcal{A}_n)$ sont de même cardinal.

De plus $\mathcal{S}_n = \mathcal{A}_n \cup \tau\mathcal{A}_n$, cette union est disjointe, donc \mathcal{A}_n est de cardinal $\frac{n!}{2}$.

Par exemple pour \mathcal{S}_3 les permutations de signature 1 sont e , $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2)$ alors que les permutations des signature -1 sont $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, et $(2\ 3)$.

Pour \mathcal{S}_4 on obtient deux ensembles de 12 éléments :

Les permutations de signature 1 sont l'identité, les 8 3-cycles comme $(1\ 2\ 3)$, les 3 produits de deux transpositions à support disjoints comme $(1\ 2)(3\ 4)$.

Les permutations de signature -1 sont les 6 transpositions comme $(1\ 2)$ et les 6 4-cycles comme $(1\ 2\ 3\ 4)$.

⑥ Soit $u_1 = (2, 1)$, $u_2 = (1, -2)$ et :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (5x + 2y, 2x + 2y)$$

- Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 .
- Donner la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^2 , puis dans la base \mathcal{B} .
- Calculer de deux façons différentes le déterminant de f . Justifier que f est un isomorphisme.
- Démontrer que $f \circ f = 7f - 6\text{Id}_E$.

- a. Le déterminant de la famille \mathcal{B} est :

$$\det \mathcal{B} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

Comme il n'est pas nul alors la famille \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^2 .

- b. La matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^2 est :

$$A = M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On calcule les images de u_1 et u_2 par f et on les exprime en fonction de u_1 et u_2 .
Comme :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

alors $f(u_1) = 6u_1$ et $f(u_2) = u_2$, donc la matrice de f dans la base \mathcal{B} est :

$$B = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- c. Par propriété le déterminant de f est le déterminant de sa matrice dans toute base de \mathbb{R}^2 , donc :

$$\det f = \det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad \text{et} \quad \det f = \det B = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

Comme ce déterminant n'est pas nul alors f est un isomorphisme.

d. On constate que :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 7B - 6I_2 = \begin{pmatrix} 42 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi les endomorphismes $f \circ f$ et $7f - 6\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ ont même matrice dans la base \mathcal{B} et donc ils sont égaux : $f \circ f = 7f - 6\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$

⑦ Soit p un projecteur de E de rang r , et s la symétrie de E associée à p .

Calculer les déterminants de p et de s en fonction de r .

Comme p est un projecteur alors son noyau et son image sont supplémentaires.

Soit \mathcal{B}_1 une base de $\text{im } p$ et \mathcal{B}_2 une base de $\ker p$.

Alors par le théorème de la base adaptée, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E .

Par définition du projecteur :

$$\forall u \in \text{im } p \quad p(u) = u \quad \text{et} \quad \forall u \in \ker p \quad p(u) = 0_E$$

La matrice de p dans la base \mathcal{B} est donc :

$$P = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|ccc} \xrightarrow{r} & 1 & & \\ \uparrow r & \cdot & 0 & \\ & 0 & \cdot & \\ & & & 1 \\ \downarrow & & & \\ \xrightarrow{r} & & & 0 \\ \hline & & & 0 \\ \hline & 0 & & 0 \\ \hline & & & \\ \downarrow n & & & \\ \xrightarrow{n} & & & \end{array} \end{pmatrix}$$

Par définition de la symétrie associée à p :

$$\forall u \in \text{im } p \quad s(u) = u \quad \text{et} \quad \forall u \in \ker p \quad s(u) = -u$$

On applique les opérations ($L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$) puis ($C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 34 \end{vmatrix} = -34$$

Ce déterminant n'est pas nul donc le système est de Cramer. Pour le résoudre on calcule :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 42 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 2 & 21 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 0 & 17 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17 \times 20 = -340$$

($L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$)
($L_2 \leftarrow \frac{1}{10}L_2$)
($L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$)

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 13 & 4 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 17 \end{vmatrix} = 6 \times 17$$

($L_1 \leftarrow L_1 - L_2$)
($L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1$)
($C_2 \leftarrow C_2 + C_1$)

On en déduit l'unique solution du système :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 10 \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -3$$

b. On calcule le déterminant du système :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 - 1 & -2a \\ 2a & a^2 - 1 \end{vmatrix} = (a^2 - 1)^2 + 4a^2 = a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2$$

Comme a est réel alors ce déterminant ne peut être nul, et donc le système est de Cramer. On calcule ensuite :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -2a \\ a^3 + 3a & a^2 - 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1)$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & a \\ a^3 + 3a & a^2 - 1 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - aC_1)$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a^3 + 3a & -a^4 - 2a^2 - 1 \end{vmatrix} = 2(a^2 + 1)^2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a^2 - 1 & -2 \\ 2a & a^3 + 3a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a^2 - 1 & -2 \\ 2 & a^2 + 3 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - C_1)$$

$$= a \begin{vmatrix} a^2 - 1 & -a^2 - 1 \\ 2 & a^2 + 1 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$$

$$= a \begin{vmatrix} a^2 - 1 & -a^2 - 1 \\ a^2 + 1 & 0 \end{vmatrix} = a(a^2 + 1)^2$$

On en déduit l'unique solution du système :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 2 \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = a$$

c. Le déterminant du système est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix}$$

On utilise pour pivot le 1 en haut de la troisième colonne :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-a & a-1 & 1 \\ 1-a^2 & -2-a & a \end{vmatrix} = (1-a) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1-a^2 & -2-a \end{vmatrix} = (1-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1-a^2 & -1-a-a^2 \end{vmatrix}$$

Finalement :

$$\Delta = (a-1)(a^2+a+1)$$

Comme a est réel ce déterminant est nul si et seulement si $a = 1$.

Cas 1. $a = 1$.

Le système devient :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}_c = \{(0, 1, 0) + \lambda(1, 0, -1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Cas 2. $a \neq 1$.

Le système est de Cramer. On calcule les déterminant suivants en utilisant toujours pour pivot le 1 en haut de la troisième colonne.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ -a-1 & -2 & a \end{vmatrix} = (1-a)(a^2+a+1)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 1 & -a-1 & a \end{vmatrix} = a(a-1)(a^2+a+1)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & -2 & -a-1 \end{vmatrix} = a(a-1)(a^2+a+1)$$

L'unique solution du système est donnée par les formules de Cramer $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$, soit :

$$(x, y, z) = (-1, a, 1).$$

1 Soit p et q deux entiers tels que $1 < q < p$, et a_1, \dots, a_p des entiers distincts.

- Calculer $(a_1 \dots a_q)(a_q \dots a_p)$. Vérifier la concordance avec la signature.
- Calculer $(a_1 a_2)(a_2 a_3) \dots (a_{p-1} a_p)$.
- Simplifier $\sigma = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 4 \ 5)(2 \ 6)$ grâce au a.

Soit n un entier supérieur ou égal à tous les a_i , si bien que les permutations de cet exercice appartiennent au groupe \mathcal{S}_n .

- a. On pose $\sigma_1 = (a_1 \dots a_q)$, $\sigma_2 = (a_q \dots a_p)$ et $\sigma = \sigma_1 \sigma_2$.

Soit $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Si x n'est pas l'un des a_i alors $\sigma_2(x) = x$, puis $\sigma(x) = \sigma_1(\sigma_2(x)) = x$.

Si x est l'un des a_i , alors :

- Si $1 \leq i < q$ alors $\sigma(a_i) = \sigma_1(\sigma_2(a_i)) = \sigma_1(a_i) = a_{i+1}$.
- Si $q \leq i < p$ alors $\sigma(a_i) = \sigma_1(\sigma_2(a_i)) = \sigma_1(a_{i+1}) = a_{i+1}$ car $q < i + 1 \leq p$.
- Si $i = p$ alors $\sigma(a_p) = \sigma_1(\sigma_2(a_p)) = \sigma_1(a_q) = a_1$.

Finalement :

- Si $1 \leq i < p$ alors $\sigma(a_i) = a_{i+1}$.
- Si $i = p$ alors $\sigma(a_p) = a_1$.

Donc $\sigma = (a_1 \dots a_p)$.

- b. D'après la question précédente : $(a_1 a_2)(a_2 a_3) \dots (a_{p-1} a_p) = (a_1 \dots a_p)$.

Ceci peut être démontré par récurrence sur p .

On sait que toute permutation se décompose en produit de cycles. On peut donc en déduire que toute permutation est produit de transpositions, *i.e.*, les transpositions engendrent le groupe \mathcal{S}_n .

- c. En utilisant la question a :

$$\begin{aligned}
 \sigma &= (1 \ 2 \ 3)(1 \ 4 \ 5)(2 \ 6) \\
 &= (2 \ 3 \ 1)(1 \ 4 \ 5)(2 \ 6) \\
 &= (2 \ 3 \ 1 \ 4 \ 5)(2 \ 6) \\
 &= (3 \ 1 \ 4 \ 5 \ 2)(2 \ 6) \\
 &= (3 \ 1 \ 4 \ 5 \ 2 \ 6) \\
 &= (1 \ 4 \ 5 \ 2 \ 6 \ 3).
 \end{aligned}$$

2 Soit $n \geq 2$.

- Soit a et b deux entiers naturels. Démontrer que la transposition $(a b)$ s'écrit comme produit de transpositions de la forme $(i i + 1)$.
- Démontrer par récurrence que tous les éléments de \mathcal{S}_n sont obtenus par produits des transpositions $(1 2), (2 3), \dots, (n - 1 n)$.

- On montre que $(a b) = (a a + 1)(a + 1 a + 2) \dots (b - 1 b)(b - 2 b - 1) \dots (a a + 1)$.
- On sait que toute permutation est produit de transpositions, donc d'après la question précédente toute permutation est produit des transpositions $(i i + 1)$.

3 Soit $n \geq 2$, puis $\sigma = (1 2 \dots n)$ et $\tau = (1 2)$.

- Calculer $\sigma^{n-1}\tau\sigma^2$.
- Démontrer par récurrence que tous les éléments de \mathcal{S}_n peuvent être obtenus par produits uniquement de τ et σ .

On obtient $\sigma^{n-1}\tau\sigma^2 = (1 2 \dots n - 1)$.

Soit $\rho \in \mathcal{S}_n$, et $k = \rho(n)$.

Si $k = n$ alors ρ est une permutation de $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, par hypothèse de récurrence il est produit de τ et $(1 2 \dots n - 1)$, donc de τ et σ .

Sinon $\sigma^{n-k}\rho$ envoie n sur n , donc on conclut de la même façon.

4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note \mathcal{A}_n l'ensemble des éléments de \mathcal{S}_n de signature 1.

- Démontrer que \mathcal{A}_n est un sous-groupe de \mathcal{S}_n .
- On suppose que $n \geq 4$. Démontrer que $(1 2)(3 4)$ est un produit de deux 3-cycles.
- Démontrer que tout élément de \mathcal{A}_n se décompose en produit de 3-cycles.

- \mathcal{A}_n est inclus dans \mathcal{S}_n , contient e , et est stable par \circ .

Ou directement : \mathcal{A}_n est le noyau de la signature.

- On essaie avec $(1 2 3)$, on obtient $(1 2)(3 4) = (1 4 3)(1 2 3)$. On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} (1 2)(3 4) &= (1 2)(2 3)(2 3)(3 4) \\ &= (1 2 3)(2 3 4) \end{aligned}$$

- Toute permutation est produit de transpositions. Si une permutation est de signature 1 alors elle est produit d'un nombre pair de transpositions. On peut donc les assembler deux à deux.

D'après la question précédente un produit $(a b)(c d)$ est produit de deux 3-cycles si a, b, c, d sont distincts. Sinon $(a b)(b c) = (a b c)$.

5 Soit n entier naturel non-nul.

a. Soit $\sigma = (a_1 \dots a_p)$ et ρ deux éléments de \mathcal{S}_n .

Démontrer que $\rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(a_1) \dots \rho(a_p))$.

b. On suppose que $n \geq 5$. Démontrer que si $\sigma = (a \ b \ c)$ alors il existe une permutation ρ de signature 1 telle que $\rho\sigma\rho^{-1} = (1 \ 2 \ 3)$.

a. On note $b_i = \rho(a_i)$. On vérifie que $\rho\sigma\rho^{-1}(b_i) = b_{i+1}$. Si un entier x n'est pas l'un des b_i alors $\rho^{-1}(x)$ n'est pas l'un des a_i , donc $\rho\sigma\rho^{-1}(x) = x$.

b. Il faut que ρ vérifie $\rho(a) = 1$, $\rho(b) = 2$ et $\rho(c) = 3$.

Il existe forcément une telle permutation, car a, b, c sont distincts. Si elle est de signature -1 alors on la remplace par $\tau\rho$ où $\tau = (4 \ 5)$, on démontre que $\tau\rho\sigma\rho^{-1}\tau = (1 \ 2 \ 3)$.

On peut donc énoncer la même propriété avec $(a' \ b' \ c')$ au lieu de $(1 \ 2 \ 3)$. On en déduit que \mathcal{A}_n est un groupe *simple*, élément essentiel de la preuve de Galois sur la non-résolubilité des équations algébriques de degrés au moins 5.

6 Soit $u_1 = (10, 1)$, $u_2 = (1, 10)$ et :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto \frac{1}{9}(10x - 55y, 46x - 10y)$$

Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 et donner la matrice de f dans cette base. L'application f est-elle un isomorphisme ?

Le déterminant de la famille \mathcal{B} est :

$$\det \mathcal{B} = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 99$$

Il est non-nul donc la famille \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^2 .

La matrice de f dans la base canonique est $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 10 & -55 \\ 46 & -10 \end{pmatrix}$. On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 10 & -55 \\ 46 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 45 \\ 450 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} && \text{donc } f(u_1) = 5u_2 \\ \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 10 & -55 \\ 46 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -540 \\ -54 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{donc } f(u_2) = -6u_1 \end{aligned}$$

La matrice de f dans la base \mathcal{B} est donc :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de f est :

$$\det f = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 30$$

Il n'est pas nul donc f est un isomorphisme.

7 Calculer les déterminants suivants.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 20 & 35 \\ 6 & 42 \end{vmatrix}$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{vmatrix}$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} 5 - \sqrt{11} & \sqrt{14} \\ \sqrt{14} & 5 + \sqrt{11} \end{vmatrix}$$

$$d_5 = \begin{vmatrix} 863 & 43 \\ 21 & 1 \end{vmatrix}$$

$$d_6 = \begin{vmatrix} 77 & 23 \\ 23 & 77 \end{vmatrix}$$

$$d_7 = \begin{vmatrix} 1 & 81 \\ 81 & 6401 \end{vmatrix}$$

$$d_8 = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -\lambda \\ \lambda & \lambda + 6 \end{vmatrix}$$

$$d_9 = \begin{vmatrix} -17 & 21 \\ 43 & -54 \end{vmatrix}$$

$$d_{10} = \begin{vmatrix} \pi^2 + \pi & \pi - 1 \\ \pi^2 - 1 & \pi + 2 \end{vmatrix}$$

$$d_{11} = \begin{vmatrix} a^2 - 2a & a^2 + a - 7 \\ a^2 + 3 & a^2 + 3a + 2 \end{vmatrix}$$

- Grâce aux opérations ($L_1 \leftarrow L_1 - L_2$) puis ($C_2 \leftarrow C_2 - C_1$) :

$$d_1 = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- On factorise les lignes et les colonnes :

$$d_2 = \begin{vmatrix} 20 & 35 \\ 6 & 42 \end{vmatrix} = 5 \times 6 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 5 \times 6 \times 7 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 5 \times 6 \times 7$$

- $d_3 = \begin{vmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{vmatrix} = -i^2 - 1 = 0$

Effectivement les colonnes sont colinéaires dans \mathbb{C}^2 : $i \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

- $d_4 = \begin{vmatrix} 5 - \sqrt{11} & \sqrt{14} \\ \sqrt{14} & 5 + \sqrt{11} \end{vmatrix} = (5 - \sqrt{11})(5 + \sqrt{11}) - (\sqrt{14})^2 = 25 - 11 - 14 = 0$

Là encore les colonnes sont colinéaires, mais c'est difficile à voir.

- Grâce aux opérations ($C_1 \leftarrow C_1 - C_2$), puis factorisation de la première colonne :

$$d_5 = \begin{vmatrix} 863 & 43 \\ 21 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 820 & 43 \\ 20 & 1 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 41 & 43 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -40$$

- On additionne les deux lignes puis on soustrait les colonnes :

$$d_6 = \begin{vmatrix} 77 & 23 \\ 23 & 77 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 100 \\ 23 & 77 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 23 & 77 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 23 & 54 \end{vmatrix} = 5400$$

- Soustraction de lignes, puis factorisation et soustraction de lignes :

$$d_7 = \begin{vmatrix} 1 & 81 \\ 81 & 6401 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 81 \\ 80 & 6400 - 80 \end{vmatrix} = 80 \begin{vmatrix} 1 & 81 \\ 1 & 80 - 1 \end{vmatrix} = 80 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 79 \end{vmatrix} = -160$$

- Plutôt que de développer on tente des opérations pour obtenir une forme factorisée plutôt que développée. Ici on commence par ($L_2 \leftarrow L_2 + L_1$) puis ($C_1 \leftarrow C_1 - C_2$) :

$$d_8 = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -\lambda \\ \lambda & \lambda + 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -\lambda \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -\lambda \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 30 - \lambda$$

On peut vérifier certaines valeurs. Par exemple :

- Pour $\lambda = 0$: $d_8 = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 30 = 30 - \lambda$

- Pour $\lambda = 1$: $d_8 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 28 + 1 = 29 = 30 - \lambda$

- Pour $\lambda = 5$: $d_8 = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 25 = 30 - \lambda$

- Pour $\lambda = 30$: $d_8 = \begin{vmatrix} -25 & -30 \\ 30 & 36 \end{vmatrix} = -5 \times 6 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 = 30 - \lambda$

De plus on sait que ce déterminant est nul uniquement pour la valeur $\lambda = 30$.

- Opérations ($C_2 \leftarrow C_2 + C_1$), puis ($C_1 \leftarrow C_1 + 4C_2$) :

$$d_9 = \begin{vmatrix} -17 & 21 \\ 43 & -54 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 4 \\ 43 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -11 \end{vmatrix} = 11 - (-4) = 15$$

- Opération ($L_1 \leftarrow L_1 - L_2$), factorisation de la première colonne, puis soustraction de colonnes ($C_2 \leftarrow C_2 - C_1$) :

$$\begin{aligned} d_{10} &= \begin{vmatrix} \pi^2 + \pi & \pi - 1 \\ \pi^2 - 1 & \pi + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi + 1 & -3 \\ \pi^2 - 1 & \pi + 2 \end{vmatrix} = (\pi + 1) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ \pi - 1 & \pi + 2 \end{vmatrix} \\ &= (\pi + 1) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ \pi - 1 & 3 \end{vmatrix} = (\pi + 1)(4\pi - 1) \end{aligned}$$

- Opérations ($L_2 \leftarrow L_2 - L_1$), ($C_2 \leftarrow C_2 - C_1$) :

$$\begin{aligned} d_{11} &= \begin{vmatrix} a^2 - 2a & a^2 + a - 7 \\ a^2 + 3 & a^2 + 3a + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 - 2a & a^2 + a - 7 \\ 2a + 3 & 2a + 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 - 2a & 3a - 7 \\ 2a + 3 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 6(a^2 - 2a) - (2a + 3)(3a - 7) = 6a^2 - 12a - 6a^2 + 5a + 21 \\ &= 21 - 7a = 7(3 - a) \end{aligned}$$

On vérifie certaines valeurs :

- Pour $a = 0$: $d_{10} = \begin{vmatrix} 0 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 21$

- Pour $a = 3$: $d_{10} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 12 & 20 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

La formule semble convenir.

8 Calculer les déterminants suivants.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 28 \end{vmatrix}$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} 24 & -21 & 13 \\ -11 & 16 & -9 \\ 23 & -19 & 12 \end{vmatrix}$$

$$d_5 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 8 & 1 & 9 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$d_6 = \begin{vmatrix} 27 & 28 & 29 \\ 28 & 30 & 32 \\ 29 & 32 & 36 \end{vmatrix}$$

$$d_7 = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 - 3 & 2 \\ 3 & 4\lambda & \lambda \\ 2 & 2\lambda + 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$d_8 = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta & \cos 2\theta \\ \cos \theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{vmatrix}$$

$$d_9 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & a \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix}$$

$$d_{10} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 3 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$d_{11} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & c & b \\ 2b + 2c & a & a \end{vmatrix}$$

$$d_{12} = \begin{vmatrix} a - 2b & 2a - b & a - b \\ a - 2b & 3a - 4b & 2a - 3b \\ 2a - b & a - 2b & 2a - 2b \end{vmatrix}$$

- Par la règle de Sarrus :

$$d_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^3$$

- De même :

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4a - 4a - 2 = -2$$

Ou par l'opération ($C_1 \leftarrow C_1 - C_3$) puis développement par rapport à la première colonne :

$$d_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

- Opération ($C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2$) puis développement par rapport à la troisième colonne :

$$d_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

- Opération ($L_1 \leftarrow L_1 - L_3$) puis pivot de Gauss sur les colonnes, développement par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned} d_4 &= \begin{vmatrix} 24 & -21 & 13 \\ -11 & 16 & -9 \\ 23 & -19 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -11 & 16 & -9 \\ 23 & -19 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -9 \\ 11 & 5 & 12 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 11 & 5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 11 & 5 \end{vmatrix} = 12 \end{aligned}$$

- On pourrait remarquer que $10C_1 + C_2 = 9C_3$, donc $d_5 = 0$, mais sinon grâce aux opérations $(C_3 \leftarrow C_3 - C_1)$ puis pivot de Gauss usuel sur les lignes :

$$d_5 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 8 & 1 & 9 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- Opérations $(L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$, $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$, puis $(L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$, $(C_2 \leftarrow C_2 - C_1)$, et développement par rapport à la troisième ligne :

$$d_6 = \begin{vmatrix} 27 & 28 & 29 \\ 28 & 30 & 32 \\ 29 & 32 & 36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 27 & 28 & 29 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 27 & 28 & 29 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 27 & 1 & 29 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 27 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 26$$

- On commence par l'opération $(C_2 \leftarrow C_2 - \lambda C_1)$, puis $(C_2 \leftarrow C_2 - C_3)$ et développement par rapport à la seconde colonne.

$$d_7 = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 - 3 & 2 \\ 3 & 4\lambda & \lambda \\ 2 & 2\lambda + 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -3 & 2 \\ 3 & \lambda & \lambda \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -5 & 2 \\ 3 & 0 & \lambda \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-5) \begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5(3 - 2\lambda)$$

On peut vérifier que d_7 est nul pour $\lambda = \frac{3}{2}$, par exemple car les lignes L_2 et L_3 sont colinéaires.

- À titre préliminaire on peut calculer certaines valeurs de d_8 :

$$\text{- Pour } \theta = 0 : d_8 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{- Pour } \theta = \pi : d_8 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{car } C_3 = C_1$$

$$\text{- Pour } \theta = \frac{\pi}{2} : d_8 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{car } C_3 = -C_1$$

$$\text{- Pour } \theta = \frac{\pi}{3} : d_8 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{car } C_3 = C_2 - C_1$$

$$\text{- Pour } \theta = \frac{\pi}{4} : d_8 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{vmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Il semble que d_8 soit généralement nul. Pour démontrer ceci on applique l'algorithme du pivot de Gauss. Les opérations $(L_2 \leftarrow L_2 - \cos \theta L_1)$, $(L_3 \leftarrow L_3 - \cos 2\theta L_1)$ donnent :

$$d_8 = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta & \cos 2\theta \\ \cos \theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta & \cos 2\theta \\ 0 & \cos 2\theta - \cos^2 \theta & \cos 3\theta - \cos \theta \cos 2\theta \\ 0 & \cos 3\theta - \cos \theta \cos 2\theta & \cos 4\theta - \cos^2 2\theta \end{vmatrix}$$

On utilise les formules d'addition :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{Comme } \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \text{alors } \cos(a + b) - \cos a \cos b = -\sin a \sin b$$

Elle montrent que :

$$d_8 = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta & \cos 2\theta \\ 0 & -\sin^2 \theta & -\sin \theta \sin 2\theta \\ 0 & -\sin \theta \sin 2\theta & -\sin^2 2\theta \end{vmatrix}$$

On factorise la ligne L_2 par $-\sin \theta$ et la ligne L_3 par $-\sin 2\theta$:

$$d_8 = \sin \theta \sin 2\theta \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta & \cos 2\theta \\ 0 & \sin \theta & \sin 2\theta \\ 0 & \sin \theta & \sin 2\theta \end{vmatrix} = 0$$

En effet, les lignes L_2 et L_3 sont égales donc $d_8 = 0$.

- La règle de Sarrus donne : $d_9 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & a \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2ab$

- On applique le pivot de Gauss classique sur les lignes, en commençant par ($L_1 \leftarrow L_1 + L_3$) puis ($L_1 \leftarrow -L_1$) :

$$d_{10} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 3 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 5 & 3 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 0 & 8 & 36 \\ 0 & 1 & -29 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -29 \end{vmatrix}$$

L'opération ($C_3 \leftarrow C_3 - C_2$) donne :

$$d_{10} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -30 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -30 \end{vmatrix} = -4 \times 67$$

- On commence par ($C_3 \leftarrow C_3 - C_2$) puis ($L_1 \leftarrow L_1 + L_2$) :

$$d_{11} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & c & b \\ 2b + 2c & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c - b \\ a & c & b - c \\ 2b + 2c & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & b + c & 0 \\ a & c & b - c \\ 2b + 2c & a & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la troisième colonne, on factorise la première colonne par 2, et on développe :

$$d_{11} = -(b - c) \begin{vmatrix} 2a & b + c \\ 2b + 2c & a \end{vmatrix} = 2(c - b) \begin{vmatrix} a & b + c \\ b + c & a \end{vmatrix} = 2(c - b)(a - b - c)(a + b + c)$$

- On applique le pivot de Gauss classique sur les lignes :

$$d_{12} = \begin{vmatrix} a-2b & 2a-b & a-b \\ a-2b & 3a-4b & 2a-3b \\ 2a-b & a-2b & 2a-2b \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a-2b & 2a-b & a-b \\ 0 & a-3b & a-2b \\ 3b & -3a & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} a-2b & 2a-b & a-b \\ b & -a & 0 \\ 0 & a-3b & a-2b \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2)$$

$$= -3 \begin{vmatrix} a & -b & a-b \\ b & -a & 0 \\ 0 & a-3b & a-2b \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$$

$$= -3 \begin{vmatrix} a-b & a-b & a-b \\ b & -a & 0 \\ 0 & a-3b & a-2b \end{vmatrix} = -3(a-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & -a & 0 \\ 0 & a-3b & a-2b \end{vmatrix}$$

On continue avec les opérations $(C_2 \leftarrow C_2 - C_3)$ puis $(C_3 \leftarrow C_3 - C_1)$:

$$d_{12} = -3(a-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ b & -a & 0 \\ 0 & -b & a-2b \end{vmatrix} = -3(a-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & -a & -b \\ 0 & -b & a-2b \end{vmatrix} = 3(a-b) \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a-2b \end{vmatrix}$$

On termine par les opérations $(L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$ puis $(C_1 \leftarrow C_1 - C_2)$:

$$d_{12} = 3(a-b) \begin{vmatrix} a & b \\ a-b & a-b \end{vmatrix} = 3(a-b) \begin{vmatrix} a-b & b \\ 0 & a-b \end{vmatrix} = 3(a-b)^3$$

On peut en conclure que d_{12} est nul si $a = b$, ce qui se vérifie car dans ce cas :

$$d_{12} = \begin{vmatrix} -a & a & 0 \\ -a & -a & -a \\ a & -a & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{car les lignes } L_1 \text{ et } L_3 \text{ sont liées.}$$

Mais on sait aussi que c'est le seul cas où d_{12} est nul.

9 Calculer les déterminants suivants.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & i & 1 \end{vmatrix}$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! & 3! \\ 1! & 2! & 3! & 4! \\ 2! & 3! & 4! & 5! \\ 3! & 4! & 5! & 6! \end{vmatrix} \quad d_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a & a^2 & a^2 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{vmatrix} \quad d_6 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$d_7 = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b & a+b \\ a-b & a & a+b & a+b \\ a-b & a-b & a & a+b \\ a-b & a-b & a-b & a \end{vmatrix} \quad d_8 = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & d \\ -1 & x & 0 & c \\ 0 & -1 & x & b \\ 0 & 0 & -1 & x+a \end{vmatrix} \quad d_9 = \begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix}$$

- On utilise l'algorithme classique du pivot de Gauss sur les lignes, c'est-à-dire qu'on applique les opérations élémentaires $(L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1)$, $(L_4 \leftarrow L_4 + 10L_2)$ puis $(L_4 \leftarrow L_4 - 30L_3)$:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -10 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 30 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -119 \end{vmatrix} = -119$$

- On applique les opérations $(L_4 \leftarrow L_4 - L_3)$, $(L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$ puis $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$:

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On utilise le pivot de la ligne L_2 :

$$d_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-4)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

On permute deux fois deux lignes $(L_1 \leftrightarrow L_2)$ puis $(L_2 \leftrightarrow L_4)$:

$$d_2 = 16(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

On continue l'algorithme : $(L_4 \leftarrow L_4 - L_2)$ puis $(L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3)$

$$d_2 = 16 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 160$$

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss sur les lignes :

$$\begin{aligned}
 d_3 &= \begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & i & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ 0 & 2 & 2i & 0 \\ 0 & -1-i & 2 & -1+i \\ 0 & 0 & 1+i & 1+i \end{vmatrix} \\
 &= 2(1+i) \begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & -1-i & 2 & -1+i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1+i) \begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & -i & 2+i & -1+i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 2(1+i) \begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & -1+i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(1+i) \begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+i & -1+i \end{vmatrix} \\
 &= -2(1+i) \begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -2+i \end{vmatrix} = -2(1+i) \begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4(1+i)
 \end{aligned}$$

- On applique les opérations $(L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3)$, $(L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2)$ puis $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$:

$$d_4 = \begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! & 3! \\ 1! & 2! & 3! & 4! \\ 2! & 3! & 4! & 5! \\ 3! & 4! & 5! & 6! \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! & 3! \\ 0 & 1! & 2.2! & 3.3! \\ 0 & 2! & 2.3! & 3.4! \\ 0 & 3! & 2.4! & 3.5! \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne, on factorise les colonnes C_2 et C_3 puis on recommence :

$$\begin{aligned}
 d_4 &= \begin{vmatrix} 1! & 2.2! & 3.3! \\ 2! & 2.3! & 3.4! \\ 3! & 2.4! & 3.5! \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times \begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 3! & 4! \\ 3! & 4! & 5! \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 0 & 2! & 2.3! \\ 0 & 3! & 2.4! \end{vmatrix} \\
 &= 6 \begin{vmatrix} 2! & 2.3! \\ 3! & 2.4! \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 2! & 3! \\ 3! & 4! \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 2! & 3! \\ 0 & 3! \end{vmatrix} = 12^2 = 144
 \end{aligned}$$

- On applique les opérations $(L_4 \leftarrow L_4 - L_3)$, $(L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$ puis $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$:

$$d_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a & a^2 & a^2 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & a^2-a & a^2-a \\ 0 & 0 & 0 & a^3-a^2 \end{vmatrix} = a^3(a-1)^3$$

Ce déterminant est donc nul pour $a = 0$ et $a = 1$, ce qui se voit tout de suite, mais seulement dans ces cas-là.

- On développe par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned}
 d_6 &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^3 - 3\lambda) + 2 \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^4 - 3\lambda^2 + 2(\lambda^2 - 2) = \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4)
 \end{aligned}$$

On aurait pu faire apparaître ce déterminant sous forme factorisée, par exemple en commençant par les opérations $(C_1 \leftarrow C_1 - C_2)$, $(C_1 \leftarrow C_1 - C_3)$, $(C_1 \leftarrow C_1 + 2C_4)$.

- Par opérations élémentaires sur les lignes puis sur les colonnes :

$$\begin{aligned}
 d_7 &= \begin{vmatrix} a & a+b & a+b & a+b \\ a-b & a & a+b & a+b \\ a-b & a-b & a & a+b \\ a-b & a-b & a-b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b & a+b \\ -b & -b & 0 & 0 \\ -b & -2b & -b & 0 \\ -b & -2b & -2b & -b \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ -b & 0 & b & b \\ -b & -b & 0 & b \\ -b & -b & -b & 0 \end{vmatrix} = -b^3 \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -b^3 \begin{vmatrix} 0 & b & a+b & a+b \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= b^3 \begin{vmatrix} b & a+b & a+b \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = b^3 \begin{vmatrix} b & 0 & a+b \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b^3 \begin{vmatrix} b & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = b^4
 \end{aligned}$$

On peut vérifier par exemple que si $a = b$ ou $a = -b$ alors ce déterminant est égal à b^4 , car il est triangulaire.

- En développant par rapport à la dernière colonne on obtient :

$$d_8 = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & d \\ -1 & x & 0 & c \\ 0 & -1 & x & b \\ 0 & 0 & -1 & x+a \end{vmatrix} = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

- On commence par les opérations $(L_1 \leftarrow L_1 - L_3)$ puis $(L_2 \leftarrow L_2 - L_4)$:

$$d_9 = \begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & 0 & c-a & 0 \\ 0 & a-c & 0 & c-a \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix} = (a-c)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix}$$

On continue avec $(C_3 \leftarrow C_3 + C_1)$ et $(C_4 \leftarrow C_4 + C_2)$, puis on développe :

$$\begin{aligned}
 d_9 &= (a-c)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & b & a+c & 2b \\ b & c & 2b & a+c \end{vmatrix} = (a-c)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a+c & 2b \\ c & 2b & a+c \end{vmatrix} \\
 &= (a-c)^2 \begin{vmatrix} a+c & 2b \\ 2b & a+c \end{vmatrix} = (a-c)^2 (a+c-2b)(a+c+2b)
 \end{aligned}$$

10 Les familles suivantes sont-elles des bases de E ? On discutera éventuellement suivant les valeurs des paramètres.

- a. $E = \mathbb{R}^2$ $u_1 = (\lambda + 3, 3\lambda + 1)$ $u_2 = (2\lambda + 3, 5\lambda + 4)$
 b. $E = \mathbb{R}^3$ $u_1 = (4 - \lambda, 2, 5)$ $u_2 = (1, 2 - \lambda, -4)$ $u_3 = (1, 2, -4 - \lambda)$
 c. $E = \mathbb{R}_1[X]$ $P_1 = 32X + 47$ $P_2 = 23X + 34$
 d. $E = \mathbb{R}_2[X]$ $P_1 = 4X^2 + 3X - 1$ $P_2 = 2X^2 - 2X + 3$ $P_3 = 3X^2 + 2X - 4$
 e. $E = \mathbb{R}_2[X]$ $P_1 = (X - \alpha)(X - \beta)$ $P_2 = (X - \alpha)(X - \gamma)$ $P_3 = (X - \beta)(X - \gamma)$

a. $\det(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 2\lambda + 3 \\ 3\lambda + 1 & 5\lambda + 4 \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)(\lambda - 9)$

La famille (u_1, u_2) est une base de \mathbb{R}^2 si et seulement si son déterminant est non-nul, donc si et seulement si λ est différent de -1 et de 9 .

Effectivement si $\lambda = -1$ alors $u_1 = (2, -2)$ et $u_2 = (1, -1)$, et si $\lambda = 9$ alors $u_1 = (12, 28)$ et $u_2 = (21, 49)$, dans le deux cas u_1 et u_2 sont colinéaires.

b. $\det(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2 - \lambda & 2 \\ 5 & -4 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 5)(\lambda + 3)$

La famille (u_1, u_2, u_3) est une base de \mathbb{R}^3 si et seulement si son déterminant est non-nul, donc si et seulement si λ est différent de 0 , 5 et -3 .

c. Le déterminant de la famille (P_1, P_2) dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$\det(P_1, P_2) = \begin{vmatrix} 47 & 34 \\ 32 & 23 \end{vmatrix}$$

On le calcule grâce aux opérations $(C_1 \leftarrow C_1 - C_2)$, $(L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$, $(C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1)$:

$$\det(P_1, P_2) = \begin{vmatrix} 13 & 34 \\ 9 & 23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 9 & 23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

Le déterminant de la famille (P_1, P_2) n'est pas nul donc cette famille est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

d. Le déterminant de la famille (P_1, P_2, P_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est :

$$\det(P_1, P_2, P_3) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

On le calcule par opérations élémentaires sur les lignes, en suivant l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\det(P_1, P_2, P_3) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 14 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -49$$

Comme son déterminant n'est pas nul la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

e. On développe les polynômes P_1, P_2, P_3 :

$$\begin{aligned}P_1 &= X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta \\P_2 &= X^2 - (\alpha + \gamma)X + \alpha\gamma \\P_3 &= X^2 - (\beta + \gamma)X + \beta\gamma\end{aligned}$$

Le déterminant de la famille (P_1, P_2, P_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est donc :

$$\det(P_1, P_2, P_3) = \begin{vmatrix} \alpha\beta & \alpha\gamma & \beta\gamma \\ -\alpha - \beta & -\alpha - \gamma & -\beta - \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Les opérations élémentaires $(C_2 \leftarrow C_2 - C_1)$ puis $(C_3 \leftarrow C_3 - C_1)$ donnent :

$$\det(P_1, P_2, P_3) = \begin{vmatrix} \alpha\beta & \alpha(\gamma - \beta) & \beta(\gamma - \alpha) \\ -\alpha - \beta & \beta - \gamma & \alpha - \gamma \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\gamma - \beta)(\gamma - \alpha) \begin{vmatrix} \alpha\beta & \alpha & \beta \\ -\alpha - \beta & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Enfin l'opération $(C_3 \leftarrow C_3 - C_2)$ donne :

$$\det(P_1, P_2, P_3) = (\gamma - \beta)(\gamma - \alpha) \begin{vmatrix} \alpha\beta & \alpha & \beta - \alpha \\ -\alpha - \beta & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Finalement :

$$\det(P_1, P_2, P_3) = (\gamma - \beta)(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha)$$

Ce déterminant est nul si et seulement si deux des trois réels α, β, γ sont égaux, donc la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ si et seulement si α, β, γ sont tous distincts.

11 Soit a et b deux réels, et :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

- Justifier que la matrice M n'est pas inversible si $a = b$.
- Existe-t-il d'autres cas où la matrice M n'est pas inversible ?

- Si $a = b$ alors les trois colonnes de M sont égales, donc M est de rang 1 (ou 0 si $a = 0$) et elle n'est donc pas inversible.
- On calcule le déterminant de M en commençant par les opérations $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$ et $(L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$, puis en factorisant les lignes 2 et 3 :

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b - a & a - b & 0 \\ b - a & 0 & a - b \end{vmatrix} = (b - a)^2 \begin{vmatrix} a & b & b \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

On termine avec le règle de Sarrus :

$$\det M = (b - a)^2(a + 2b)$$

Ceci montre que le déterminant de M est nul si $a = b$ ou $a = -2b$.

Il existe donc un autre cas où la matrice n'est pas inversible, c'est le cas où $b = -2a$.
En effet dans ce cas :

$$M = \begin{pmatrix} -a & a & a \\ a & -2a & a \\ a & a & -2a \end{pmatrix} = a^3 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas inversible, par exemple car la somme des trois colonnes est nulle, donc $C_3 = -(C_1 + C_2)$.

12 Démontrer qu'une matrice antisymétrique de taille (n, n) avec n impair n'est jamais inversible.

Une matrice est antisymétrique si et seulement si : ${}^tM = -M$

Pour toute matrice M : $\det {}^tM = \det M$

Si M est de taille (n, n) alors par multilinéarité du déterminant : $\det(-M) = (-1)^n \det M$

Donc si n est impair alors : $\det(-M) = -\det M$

Et donc si M est antisymétrique et n est impair alors $\det M = -\det M$, ce qui donne $\det M = 0$, et donc M n'est pas inversible.

13 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on définit le déterminant de taille (n, n) suivant.

$$d_n = \begin{vmatrix} 2 \cos \theta & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2 \cos \theta & 1 \\ 0 & & 1 & \cos \theta \end{vmatrix}$$

Exprimer d_{n+2} en fonction de d_{n+1} et de d_n , et en déduire une formule générale pour d_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le développement de d_{n+2} par rapport à la première colonne donne :

$$d_{n+2} = 2 \cos \theta \begin{vmatrix} 2 \cos \theta & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2 \cos \theta & 1 \\ 0 & & 1 & \cos \theta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 \cos \theta & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \cos \theta & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \cos \theta \end{vmatrix}$$

Ces deux déterminants sont de taille $(n + 1, n + 1)$, le premier est d_{n+1} . Quant au second, on peut le développer par rapport à la ligne L_1 , on obtient alors d_n . On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad d_{n+2} = 2 \cos \theta d_{n+1} - d_n$$

Il s'agit d'une relation de double-réurrence. Le polynôme caractéristique est :

$$\lambda^2 - 2 \cos \theta \lambda + 1 = 0$$

Son discriminant est $\Delta = 4 \cos^2 \theta - 4 = -4 \sin^2 \theta = (2i \sin \theta)^2$, donc ses racines sont :

$$\lambda_1 = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta}$$

On suppose que ces deux racines sont distinctes, c'est-à-dire que θ n'est pas un multiple de π . Alors il existe deux constantes α et β , éventuellement complexes, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad d_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n = \alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta}$$

Ceci s'écrit aussi :

$$d_n = (\alpha + \beta) \cos(n\theta) + (\alpha - \beta)i \sin(n\theta)$$

En posant $A = (\alpha + \beta)$ et $B = (\alpha - \beta)i$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad d_n = A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)$$

On calcule les premiers termes :

$$d_1 = \det(\cos \theta) = \cos \theta \quad \text{et} \quad d_2 = \begin{vmatrix} 2 \cos \theta & 1 \\ 1 & \cos \theta \end{vmatrix} = 2 \cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$$

On en déduit $A = 1$ et $B = 0$, ce qui montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad d_n = \cos(n\theta)$$

Si maintenant θ est un multiple de π , alors $\alpha = k\pi$ où k est un entier. L'équation caractéristique admet $e^{i\theta} = (-1)^k$ pour unique solution, donc le terme général de d_n est :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad d_n = (\alpha n + \beta)(-1)^{kn}$$

On calcule :

$$d_1 = \cos(k\pi) = (-1)^k \quad \text{et} \quad d_2 = \cos(2k\pi) = 1$$

On en déduit $(\alpha + \beta)(-1)^k = (-1)^k$ et $2\alpha + \beta = 1$, d'où $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ et finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad d_n = (-1)^{kn}$$

Or $\cos(nk\pi) = (-1)^{nk}$ donc la formule obtenue dans le premier cas est toujours valable. Finalement, dans tous les cas :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad d_n = \cos(n\theta)$$

14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et a, b deux réels. On note d_n le déterminant de taille $(2n, 2n)$ suivant.

$$d_n = \begin{vmatrix} a & & 0 & & b \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ b & & 0 & & a \end{vmatrix}$$

- Exprimer d_n en fonction de d_{n-1} .
- En déduire la valeur de d_n .

a. En développant par rapport à la première ligne puis par rapport à la dernière ligne on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \quad d_n = (a^2 - b^2)d_{n-1}$$

b. On calcule $d_1 = a^2 - b^2$, et on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad d_n = (a^2 - b^2)^n$$

15 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de scalaires. On note $V_n(a_0, \dots, a_n)$ le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_0^0 & \dots & a_n^0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

On convient que $a_k^0 = 1$ même si a_k est nul.

- Soit $P(X) = V_n(a_0, \dots, a_{n-1}, X)$. Démontrer que P est un polynôme de degré au plus n en X , et que $a_0 \dots a_{n-1}$ en sont racines.
- En déduire que :

$$P(X) = V_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1}) \prod_{k=0}^{n-1} (X - a_k)$$

On isolera le cas où les a_k ne sont pas tous distincts.

c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

a. On peut écrire :

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_0 & \dots & a_{n-1} & X \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_0^n & \dots & a_{n-1}^n & X^n \end{vmatrix}$$

Le développement par rapport à la dernière colonne montre que P est un polynôme de degré au plus n .

De plus, si X prend la valeur de l'un des a_k alors la dernière colonne est égale à la colonne de a_k , donc le déterminant est nul.

Ceci montre que a_0, \dots, a_{n-1} sont racines de P .

b. Supposons que les a_k sont distincts.

Alors le polynôme P est de degré au plus n et il a n racines distinctes, donc il s'écrit :

$$P(X) = \lambda \prod_{k=0}^{n-1} (X - a_k)$$

où λ est son coefficient dominant.

Le développement du déterminant $P(X)$ dans la question précédente montre que le coefficient en X^n est $V_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1})$, donc $\lambda = V_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1})$ et on obtient bien le résultat attendu.

Si maintenant deux des a_k sont égaux, alors deux colonnes sont égales dans les déterminants $V_n(a_0, \dots, a_{n-1}, X)$ et $V_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1})$, donc ils sont nuls et ainsi l'égalité demandée est vraie aussi.

c. La question précédente donne, en spécialisant en a_n :

$$V_n(a_0, \dots, a_n) = V_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1}) \prod_{k=0}^{n-1} (a_n - a_k)$$

On démontre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad V_n(a_0, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^n \left(\prod_{k=0}^{i-1} (a_i - a_k) \right)$$

Ceci donne bien :

$$V_n(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

16 Soit n un entier strictement positif, et

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer le rang de A_n en fonction de n .
- Calculer le déterminant de A_n .
- Soit $B_n = A_n - I_n$. En considérant l'application linéaire canoniquement associée à B_n , déterminer B_n^n .
- Dans le cas où A_n est inversible, démontrer que son inverse est une combinaison linéaire des B_n^k .

a. Le noyau de A_n est l'ensemble des vecteurs (x_1, \dots, x_n) de \mathbb{R}^n tels que :

$$x_1 = -x_2 = x_3 = \dots = (-1)^{n-1}x_n = (-1)^n x_1$$

Ceci donne :

$$\ker A_n = \begin{cases} \{0_{\mathbb{R}^n}\} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \text{Vect}((1, -1, 1, \dots, -1)) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Ce noyau est de dimension nulle si n est impair, 1 si n est pair. D'après le théorème du rang :

$$\text{rg } A_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est impair} \\ n - 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

b. On développe par rapport à la première colonne :

$$\det A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1)^n$$

Ceci confirme que A_n est inversible si n est impair, car dans ce cas $\det A_n = 2$, mais pas si n est pair, car dans ce cas $\det A_n = 0$.

c. L'application canoniquement associée à B_n est :

$$f : \begin{matrix} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) \end{matrix}$$

On constate que la composée n fois de f est l'identité, donc $B_n^n = I_n$.

d. On suppose que n est impair. Alors A_n est inversible.

On résout l'équation $A_n \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k B_n^k = I_n$, en remplaçant A_n par $B_n + I_n$ et en faisant apparaître un télescopage. On obtient qu'il existe bien une solution :

$$\lambda_0 = -\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = \frac{1}{2}$$

Ainsi l'inverse de A_n est $A_n^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k B_n^k$, ce qui s'écrit :

$$A_n^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Au-dessus de la diagonale, une diagonale sur deux contient des $\frac{1}{2}$, l'autre contient des $-\frac{1}{2}$. En dessous c'est également le cas mais la seconde diagonale contient des $\frac{1}{2}$, puis on alterne.

17 Soit A une matrice carrée

a. Démontrer que si A est inversible alors :

$$\begin{aligned}\operatorname{Com}({}^tA) &= {}^t\operatorname{Com}(A) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \operatorname{Com}(\lambda A) &= \lambda^{n-1} \operatorname{Com}(A) \\ \operatorname{Com}(A^{-1}) &= (\operatorname{Com}(A))^{-1}\end{aligned}$$

b. Démontrer que les deux premiers résultats restent vrais si A n'est pas inversible.

a. Tout se démontre grâce à la relation $A {}^t\operatorname{Com}(A) = {}^t\operatorname{Com}(A)A = (\det A)I_n$.

b. Il faut utiliser la définition de la comatrice.

Les cofacteurs c_{ij} sont $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$, et on remarque que $A_{ji} = ({}^tA)_{ij}$.

Ensuite $\det(\lambda A)_{ij} = \lambda^{n-1} \det A_{ij}$.

18 Soit A une matrice inversible. Déterminer toutes les matrices M telles que :

$$\operatorname{Com}(M) = A$$

Si M est solution alors $M {}^tA = \det(M)I_n$.

Le cas où $\det M = 0$ est exclus.

On aboutit à $M = \zeta {}^tA^{-1}$ où ζ est une racine $(n-1)^{\text{ème}}$ de $\det A$.

On vérifie, sachant que pour toute matrice B inversible : $\operatorname{Com}(B) = \det(B) {}^tB^{-1}$, on obtient $\operatorname{Com}(M) = A$.

19 Soit A une matrice de taille (n, n) .

a. Quel est le rang de $\operatorname{Com}(A)$ si A est de rang n ?

b. Démontrer que si A est de rang inférieur ou égal à $n-2$ alors $\operatorname{Com}(A)$ est nulle.

c. On suppose que A est de rang $n-1$. Démontrer que $\operatorname{im} {}^t\operatorname{Com}(A) \subset \ker A$ et en déduire le rang de $\operatorname{Com}(A)$.

d. Démontrer que $\operatorname{Com}(\operatorname{Com}(A)) = \lambda A$, où λ est un scalaire à déterminer.

a. Si A est de rang n alors A est inversible, donc $\operatorname{Com}(A)$ est inversible, donc $\operatorname{Com}(A)$ est de rang n .

b. Si $\operatorname{rg} A \leq n-2$ alors aucune sous-matrice de A de taille $(n-1, n-1)$ n'est inversible, donc tous les cofacteurs de A sont nuls.

c. Si $\operatorname{rg} A = n-1$ alors $\ker A$ est une droite vectorielle. Comme $A {}^t\operatorname{Com}(A) = 0_n$ alors $\operatorname{im}({}^t\operatorname{Com}(A)) \subseteq \ker A$, donc $\operatorname{Com}(A)$ est de rang 1.

d. On obtient $\lambda = (\det A)^{n-2}$.

On le démontre si A est inversible, avec au passage $\det \operatorname{Com}(A) = (\det A)^{n-1}$.

Pour $n=2$ on a toujours $\operatorname{Com}(\operatorname{Com}(A)) = A$.

Sinon c'est en fonction du rang. Par exemple pour le rang $n-1$, $\operatorname{Com}(A)$ est de rang 1 avec $1 \leq n-2$ donc $\operatorname{Com}(\operatorname{Com}(A)) = 0_n$.

20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Justifier que $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est un anneau.
- Démontrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ alors $\det A \in \mathbb{Z}$.
- Justifier que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ alors $\text{Com}(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Démontrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ tel que $AB = I_n$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

En déduire que les éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ sont les matrices de déterminants ± 1 .

- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), +)$ est un groupe, le produit de deux matrices entières est une matrice entière, la matrice identité est entière, et la distributivité est vérifiée.
- On utilise la formule :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

- Les coefficients de la comatrice sont, au signe près, des déterminants de matrices extraites de A , donc d'après la question précédente ce sont des entiers.
- On utilise la formule $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ pour le sens direct, et la relation $A^t \text{Com}(A) = \det(A) I_n$ pour le sens indirect.

Si $AB = I_n$ alors $BA = I_n$ car les matrices entières sont réelles.