TD. A14
Fonctions de deux variables

Exercices de cours

1 Soit $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $f : \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^y. \end{array}$

a. Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et donner ses dérivées partielles.

c. En composant avec la fonction $x \mapsto (x,x)$ calculer la dérivée de $x \mapsto x^x$.

d. Calculer de même la dérivée de $x \mapsto x^{x^x}$.

2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
On suppose que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \qquad \det(u, \nabla f(u)) = 0$$

Démontrer qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = h(x^2+y^2)$$

Pour ceci, composer avec la fonction :

$$(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

3 Déterminer les extrema des fonctions suivantes.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+xy+3x+y \end{array}$$

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} \end{array}$$

Travaux dirigés

1 Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles des ouverts de $\mathbb{R}^2$?

$$A = (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})^2 \qquad D = \bigcup_{i,j\in\mathbb{Z}} B\left((i,j), \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$B = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \qquad E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B\left(0, \frac{1}{n}\right).$$

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \neq y \right\}$$

2 Représenter le graphe des fonctions suivantes :

$f_1 : (x,y) \mapsto x^2 - x$ $\qquad f_2 : (x,y) \mapsto x+y$

$f_3 : (x,y) \mapsto xy$ $\qquad f_4 : (x,y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+1}$

$f_5 : (x,y) \mapsto \sqrt{1-x^2-y^2}$

3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Démontrer que f est continue.

b. Démontrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et donner leur valeur.

c. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?

4 Reproduire l'exercice précédent avec la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5 Démontrer que l'application norme :

$$N : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ mais pas en $(0,0)$.

Vérifier que son gradient indique la direction de la plus grande pente et qu'il est orthogonal aux lignes de niveau.

6 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

a. Justifier que la fonction $\varphi : t \mapsto f(t^3, t^2)$ est dérivable et calculer sa dérivée.

b. Vérifier avec $f(x,y) = xy$ puis $f(x,y) = \frac{y}{x}$.

7 Soit $U = (\mathbb{R}^*)^2$ et :

$$f : \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\arctan\frac{x}{y}, \arctan\frac{y}{x}\right) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

a. Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b. Soit a un point de $\mathbb{R}^2 \setminus U$. La fonction f admet-elle une limite en a ?

c. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et donner ses dérivées partielles.

d. Calculer le gradient de $g \circ f$.

8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

Démontrer que si $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ alors il existe une fonction φ dérivable telle que :

$$\forall (x,y) \in U \qquad f(x,y) = \varphi(x).$$

9 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Pour ceci, composer avec l'application :

$$\gamma : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & (u+v, u-v). \end{array}$$

10 Déterminer les extrema des fonctions suivantes.

$$f_1 : (x,y) \mapsto (x-y)^2 + (x+y)^3$$
$$f_2 : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$$
$$f_3 : (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$$
$$f_4 : (x,y) \mapsto x^y$$
$$f_5 : (x,y) \mapsto (x^2 - y)(2x^2 - y)$$
$$f_6 : (x,y) \mapsto xe^y + ye^x$$

TD A14. Fonctions de deux variables
Réponses

Exercices de cours

1 $\frac{\mathrm{d}x^x}{\mathrm{d}x} = (1+\ln x)x^x$

$\frac{\mathrm{d}x^{x^x}}{\mathrm{d}x} = (1 + x(1+\ln x)\ln x)x^{x^x+x-1}$

2 Le gradient est *radial*, *i.e.*, dirigé vers ou à l'opposé de l'origine.

On obtient $\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial\theta} = 0$, donc $f\circ\varphi$ ne dépend que de r.

3 $\nabla f(x,y) = (2x+y+3, x+1)$

Point critique en $(-1,-1)$

On obtient : $f(-1+h,-1+k) - f(-1,-1) = h^2+hk = \left(h+\frac{1}{2}k\right)^2 - \frac{1}{4}k^2$

C'est un point-selle.

$\nabla g(a) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} y-2x+y(y^2-x^2) \\ x-2y+x(x^2-y^2)\end{pmatrix}$

Point critique en $(0,0)$

$g(x,y) - g(0,0) = -\frac{x^2+y^2-xy}{1+x^2+y^2}$

C'est un maximum.

Travaux dirigés

1 Pour la partie C, si $a=(x,y)\in C$ on suppose $x<y$, on pose $\varepsilon = \frac{1}{2}(y-x)$. Pour tout $(x',y')\in B(a,\varepsilon)$ on a $x-\varepsilon \leqslant x' < \frac{x+y}{2} < y' \leqslant y+\varepsilon$ donc $x'\neq y'$.

3

a. L'inégalité triangulaire donne :

$$|f(x,y)| \leqslant 2||(x,y)||$$

donc f tend vers 0 en $(0,0)$.

b. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$

c. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$

Si $y\neq 0$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

4 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^3y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

Ces deux fonctions sont continues, en utilisant l'inégalité triangulaire (ou les coordonnées polaires).

5 Les application partielles en $(0,0)$ ne sont pas dérivables.

Le gradient en (x,y) est $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$.

6 $\varphi'(t) = \frac{\mathrm{d}}{dt}f(t^3,t^2) = 2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^3,t^2) + 3t^2\frac{\partial f}{\partial y}(t^3,t^2)$

7

b. La limite d'un côté est toujours l'opposé de la limite de l'autre côté : $\frac{\pi}{2}$ d'un côté, $-\frac{\pi}{2}$ de l'autre. De même en $(0,0)$, la limite de $f(x,x)$ est l'opposée de celle de $f(x,-x)$.

c. $df_{(x,y)}$ a pour matrice $\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} y & -x \\ -y & x\end{pmatrix}$.

d. $\nabla f = (0,0)$. Effectivement $g\circ f$ est constante, égale à $\pm\frac{\pi}{2}$ selon les quarts de plan.

8 On pose $\varphi(x) = f(x,0)$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ la fonction partielle $y\mapsto f(x,y)$ est constante donc $f(x,y) = f(x,0) = h(x)$.

9 $\frac{\partial(f\circ\gamma)}{\partial v} = 0$ donc f ne dépend que de u.

Il existe alors h telle que $f(x,y) = h(x+y)$.

10

f_1 admet $(0,0)$ pour point critique, ce n'est pas un extremum.

f_2 admet $a = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ pour point critique. C'est un minimum de valeur $-\frac{7}{3}$:

$f(a+(h,k)) - f(a) = h^2+hk+k^2$

f_3 admet trois points critiques : $(0,0)$, $(0,4)$ et $(0,-4)$.

Le premier est un point selle, le second un minimum local, le troisième un maximum local :

$f(4+h,k) - f(4,0) = h^2(6+h) + k^2(6+k)$

$f(h,-4+k) - f(0,-4) = -h^2(6-h) - k^2(6-k)$

f_4 admet $(1,0)$ pour point critique, ce n'est pas un extremum.

$f(1+t,t) - f(1,0) = t^2 + o(t)$

alors que $f(1+t,-t) - f(1,0) = -t^2 + o(t^2)$

f_5 admet $(0,0)$ pour point critique, ce n'est pas un extremum.

$f\left(t, \frac{3}{2}t^2\right) = -\frac{1}{4}t^4$ alors que $f(t,0) = 2t^4$.

f_6 admet $(-1,-1)$ pour point critique. Il faut le deviner, démontrer que c'est le seul grâce aux variations de $x\mapsto -xe^{\frac{1}{x}}$.

On montre que ce n'est pas un maximum en étudiant $f(-1+t,-1)$ et $f(-1+t,-1+t)$.