Chapitre A14
Fonctions de deux variables

I. Topologie du plan

Définition

On munit $\mathbb{R}^2$ de la *norme euclidienne* définie par :

Définition

Si u et v sont deux points de $\mathbb{R}^2$ la *distance* de u à v est $d(u,v) = ||u-v||$.

A. Ouverts

Définition

Soit a un élément de $\mathbb{R}^2$, r un réel strictement positif. La *boule ouverte* de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$B(a,r) = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ||u-a|| < r \right\}$$

La *boule fermée* de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$\overline{B}(a,r) = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ||u-a|| \leqslant r \right\}.$$

Exemple. Une partie de $\mathbb{R}^2$ est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule.

Définition

Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est dite *ouverte*, ou est un *ouvert*, si pour tout élément a de U il existe un réel ε strictement positif tel que :

$$B(a,\varepsilon) \subseteq U$$

On dit aussi que U est *voisinage* de tous ses points.

Exemples.

- $\mathbb{R}^2$ et $\varnothing$ sont des ouverts.
- La partie $A = [0,1] \times [0,1]$ n'est pas ouverte. En effet le point $a = (0,0)$ est élément de A, mais pour tout $\varepsilon > 0$ la boule ouverte $B(a, \varepsilon)$ n'est pas incluse dans A. Elle contient par exemple le point $\left(-\frac{\varepsilon}{2}, 0\right)$ qui n'appartient pas à A.
- Démontrons que toute boule ouverte est une partie ouverte.

  Soit $B(a, r)$ une boule ouverte.

- Les parties $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ $\quad \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ $\quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sont ouvertes.

Propositions

(i) L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.

(ii) L'union d'un nombre quelconque d'ouverts est un ouvert.

(iii) Le produit de deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.

(i) Soit $U_1, \ldots, U_n$ des ouverts, et U leur intersection.

Soit a un point de U. Alors a appartient à tous les U_i donc pour tout $i = 1, \ldots, n$ il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $B(a, \varepsilon_i) \subseteq U_i$.

Posons $\varepsilon = \operatorname{Min}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Alors $\varepsilon > 0$, et :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \varepsilon \leqslant \varepsilon_i \quad \text{donc} \quad B(a, \varepsilon) \subseteq B(a, \varepsilon_i) \subseteq U_i$$

Ceci montre que $B(a, \varepsilon) \subseteq U$. Ainsi U est un ouvert.

(ii) Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts, et U leur union.

Soit a un point de U. Alors a appartient à l'un des U_i, notons-le U_j. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subseteq U_j$, et donc $B(a, \varepsilon) \subseteq U$.

Pour tout $a \in U$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subseteq U$, donc U est un ouvert.

(iii) Soit a, b, c, d quatre éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et $c < d$. Soit $U =]a, b[\times]c, d[$.

Soit $u = (x, y)$ un point de U. Alors $a < x < b$ et $c < y < d$. On pose

$$\varepsilon = \operatorname{Min}\{x - a, b - x, y - c, d - y\}$$

Les quatre réels étant strictement positifs, ε est strictement positif.

On démontre que la boule $B(u, \varepsilon)$ est incluse dans le pavé $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\times]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$, lequel est inclus dans U. $\square$

Remarque. Une partie de $\mathbb{R}^2$ est *fermée*, ou est un *fermé*, si son complémentaire est ouvert.

On peut démontrer qu'une partie F est fermée si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F, si (u_n) converge alors sa limite appartient à F.

B. Fonctions de deux variables

Définition

Une *fonction de deux variables* est une fonction

$$f : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

où A une partie de $\mathbb{R}^2$.

On note aussi $f(u) = f(x,y)$, avec $u = (x,y)$.

Rappel. Si A et B sont deux ensembles, et $f : A \to B$ est une application, alors le *graphe* de f est l'ensemble $\Gamma = \{\,(a, f(a)) \mid a \in A\}$. C'est une partie de $A \times B$.

Ainsi si A est une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables, alors le graphe de f est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, donc une partie de l'espace. On dit que ce graphe est une *surface* ou une *nappe*.

Le graphe est l'ensemble d'équation $z = f(x,y)$: $\Gamma = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$

Remarque. L'ensemble $\mathscr{F}(A,\mathbb{R})$ des fonctions de A dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et un anneau. L'addition, la multiplication par un scalaire et la multiplication sont définies de la manière habituelle.

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a = (a_1, a_2)$ un point de A. Soit $A_1 = \{\,t \in \mathbb{R} \mid (t, a_2) \in A\}$ et $A_2 = \{\,t \in \mathbb{R} \mid (a_1, t) \in A\}$.

On appelle *applications partielles de f en a* les applications

$$\varphi_1 : \begin{array}{rcl} A_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x, a_2) \end{array} \qquad \varphi_2 : \begin{array}{rcl} A_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(a_1, y) \end{array}$$

Remarque. Les applications partielles φ_1 et φ_2 sont des fonctions d'une seule variable.

C. Continuité

Définition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et a un point de U. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est *continue en* a si :

Une fonction f est *continue* si elle est continue en tout point.

On note $\mathscr{C}(U,\mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^0(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de U dans $\mathbb{R}$.

Remarque. Soit a un point adjacent à U, c'est-à-dire que toute boule ouverte centrée en a rencontre U. Soit ℓ un réel. Alors f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall u \in U \qquad ||u-a|| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(u)-\ell| \leqslant \varepsilon$$

Si a appartient à U, alors f est continue en a si et seulement si f admet une limite finie en a.

Exemple. On note p_1 et p_2 les fonctions *projections canoniques* :

$$p_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \text{et} \qquad p_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y. \end{array}$$

Alors ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $a = (a_1, a_2)$ un point de $\mathbb{R}^2$, et soit ε un réel strictement positif. Alors pour $\eta = \varepsilon$ on a bien :

$$\forall u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad ||u-a|| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |p_1(u) - p_1(a)| \leqslant \varepsilon$$

Ceci car :

$$|p_1(u) - p_1(a)| = |x - a_1| \leqslant ||(x-a_1, y-a_2)|| = ||(x,y)-(a_1,a_2)|| = ||u-a||$$

Propositions

- L'ensemble $\mathscr{C}^0(U,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel et un anneau.
- Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Si $f : U \to I$ est continue, et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est continue alors la composée $\varphi \circ f$ est continue.
- Si f, $g : U \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues, g ne s'annulant pas, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue.

Remarques.

- Ainsi la somme et le produit de deux fonctions continues sont continues.
- Comme les projections canoniques p_1 et p_2 sont continues, alors toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}^2$, toute fraction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.
- La fonction $(x,y) \mapsto e^x \cos y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ par composition et produit.

Exemple 1. Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Attention

La continuité des applications partielles de f n'implique pas la continuité de f.

II. Calcul différentiel

Dans toute cette partie U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

A. Dérivées partielles

Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, et $a = (a_1, a_2)$ un point de U.

- On dit que f *admet une dérivée partielle selon x en a* si l'application partielle

$$\varphi_1 : x \mapsto f(x, a_2)$$

  est dérivable en a_1. On note alors $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ la dérivée de cette application en a_1, et on l'appelle *dérivée partielle selon x de f en a*.
- De même on dit que f *admet une dérivée partielle selon y en a* si l'application partielle

$$\varphi_2 : y \mapsto f(a_1, y)$$

  est dérivable en a_2. On note alors $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ la dérivée de cette application en a_2, et on l'appelle *dérivée partielle selon y de f en a*.

Remarque. Si elles existent les dérivées partielles sont donc :

Les notations $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont ambiguës car x et y sont des variables muettes. Si les variables sont différentes, par exemple $f : (r, \theta) \mapsto r^2 \cos\theta$ alors on notera $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$.

Exemple. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{x+y^2}{x^2+1} \end{array}$

Exemple 1 (suite). Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$

Attention

L'existence des dérivées partielles n'implique pas la continuité.

B. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définitions

- Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite *de classe* $\mathscr{C}^1$ en un point a de U si elle admet des dérivées partielles en a et si les applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en a.
- Une fonction f est *de classe* $\mathscr{C}^1$ sur U si elle est de classe $\mathscr{C}^1$ en tout point de U.
- On note $\mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

Propositions

- L'ensemble $\mathscr{C}^1(U)$ est un espace vectoriel réel et un anneau, en particulier la somme et le produit de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
- Le quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition.

Théorème (développement limité à l'ordre 1)

Soit $a = (a_1, a_2)$ un point de U et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ en a.
Alors il existe une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ telle que :

Corollaire

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en a alors f est continue en a.

Démonstration. Le développement limité ci-dessus montre, par inégalité triangulaire, que :

$$\forall u = (x, y) \in U \qquad |f(u) - f(a)| \leqslant |x - a_1|\left|\frac{\partial f}{\partial x}(a)\right| + |y - a_2|\left|\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right| + ||u - a|||\varepsilon(u)|$$

$$\leqslant ||u - a||\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}(a)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right| + |\varepsilon(u)|\right)$$

Par théorème d'encadrement : $f(u) \xrightarrow[u \to a]{} f(a)$. Ainsi f est continue en a. □

Remarques. Notons $a = (x_0, y_0)$ et $z_0 = f(a)$.

- Le développement limité ci-dessus peut s'écrire :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(0)}{=} f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \mathrm{o}\left(||(h, k)||\right)$$

- Le plan d'équation :

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

  est appelé *plan tangent* à la surface d'équation $z = f(x, y)$ en a.

C. Gradient

Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et a un point de U.
Le vecteur de coordonnées $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$ est appelé *gradient de f en a* et noté :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$

On définit ainsi une fonction *gradient de f* :

$$\nabla f : \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ a & \longmapsto & \nabla f(a) \end{array}$$

Remarques.

- Le gradient de f en un point a est un vecteur du plan, donc le gradient de f peut être vu comme un *champ de vecteur*.
- Le développement limité de f peut être écrit :

$$\begin{aligned} & f(u) = f(a) + (\nabla f(a) \,|\, u-a) + ||u-a|| \varepsilon(u) && \text{avec} \quad \varepsilon(u) \xrightarrow[u \to a]{} 0 \\ \text{ou} \quad & f(a+v) = f(a) + (\nabla f(a) \,|\, v) + ||v|| \varepsilon'(v) && \text{avec} \quad \varepsilon'(v) \xrightarrow[v \to 0]{} 0 \end{aligned}$$

Le gradient joue le rôle du coefficient directeur de la tangente pour les fonctions d'une seule variable.

Exemple 2. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}$

Alors pour tout point $a \in \mathbb{R}^2$: $\nabla f(a) = 2a$.

D. Dérivation d'une composée

Théorème (Première règle de la chaîne)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $x, y : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, telles que : $\forall t \in I \quad (x(t), y(t)) \in U$
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Alors la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et pour tout $t \in I$:

Remarque. Notons $u(t) = (x(t), y(t))$. Alors la première règle de la chaîne s'écrit :

On peut aussi retenir la multiplication matricielle :

$$(f \circ u)' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \circ u & \dfrac{\partial f}{\partial y} \circ u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Démonstration. Comme x et y sont dérivables en t alors il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 de limites 0 en 0 telles que pour tout h sufisamment petit :

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + h\varepsilon_1(h) \qquad \text{et} \qquad y(t+h) = y(t) + hy'(t) + h\varepsilon_2(h)$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ en $u(t) = (x(t), y(t))$ alors il existe une fonction de deux variables ε de limite 0 en 0 telle que pour tous α et β suffisamment petits :

$$f(x(t)+\alpha, y(t)+\beta) = f(u(t)) + \alpha\frac{\partial f}{\partial x}(u(t)) + \beta\frac{\partial f}{\partial y}(u(t)) + ||(\alpha,\beta)||\varepsilon(\alpha,\beta)$$

Posons $\alpha_h = hx'(t) + h\varepsilon_1(h)$ et $\beta_h = hy'(t) + h\varepsilon_2(h)$. Alors :

$$\begin{aligned} f(u(t+h)) &= f(x(t+h), y(t+h)) = f(x(t)+\alpha_h, y(t)+\beta_h) \\ &= f(u(t)) + h\left[x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(u(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(u(t))\right] + |h|\eta(h) \end{aligned}$$

où η est la fonction définie par :

$$\eta(h) = \varepsilon_1(h)\frac{\partial f}{\partial x}(u(t)) + \varepsilon_2(h)\frac{\partial f}{\partial y}(u(t)) + ||(x'(t)+\varepsilon_1(h), y'(t)+\varepsilon_2(h))||\varepsilon(\alpha_h,\beta_h)$$

Comme $\alpha_h \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et $\beta_h \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ alors $\eta(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, donc la fonction $f\circ u$ est bien dérivable en t et sa dérivée est celle annoncée.

La continuité de dérivées partielles de f, de celles de x' et de y' montrent que cette dérivées est continue, et donc la fonction $f\circ u$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$. $\square$

▷ **Exercice 1.**

Théorème (Seconde règle de la chaîne)

Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : V \to U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors la fonction $f\circ\varphi : V \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et pour $(x,y)\in V$:

$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi)\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi)\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi)\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$

Remarque. Retenir la multiplication matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial x} & \dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi & \dfrac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Exemple 3. Soit $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^*\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{y}{x} \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ par quotient des projections canoniques $(x,y)\mapsto x$ et $(x,y)\mapsto y$.

La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ car ses composantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ par produit.

On calcule $\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial r}$ et $\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial \theta}$ en tout point (r,θ).

▷ **Exercice 2.**

E. Dérivée selon un vecteur

Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction, a un point de U, et v un vecteur non-nul de $\mathbb{R}^2$. On dit que f *admet une dérivée selon le vecteur* v *en* a si la fonction :

$$f_v : t \mapsto f(a+tv)$$

est dérivable en 0. On note :

$$D_v f(a) = f_v'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$$

Ce réel est appelé *dérivée de* f *en* a *selon le vecteur* v.

Remarques.

- Il s'agit donc d'une dérivée le long de la droite passant par a dirigée par v.
- Les dérivées partielles de f sont les dérivées selon les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Proposition

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ en un point a de U alors f admet des dérivées selon tout vecteur non-nul v en a. En notant $v = (\alpha, \beta)$ cette dérivée est :

$$D_v f(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

En d'autres termes on peut écrire $D_v f(a) = (\nabla f(a) \mid v)$.

Démonstration. Soit $u : t \mapsto a + tv$, et soit $a = (a_1, a_2)$.
Alors $u(t) = (a_1 + \alpha t, a_2 + \beta t)$, donc u est de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée $u'(t) = (\alpha, \beta) = v$.
D'après la première règle de la chaîne la fonction $f \circ u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et :

Remarque. D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \qquad |(\nabla f(a) \mid v)| \leqslant ||\nabla f(a)|| \, ||v||$$

On en déduit que pour tout vecteur unitaire v : $|D_v f(a)| \leqslant ||\nabla f(a)||$
De plus les extrema de $D_v f(a)$ sont atteints si et seulement si v est colinéaire à $\nabla f(a)$.
On en déduit que le gradient de f en a indique la direction de la plus grande pente partant de $f(a)$ sur la surface d'équation $z = f(x,y)$.

F. Extrema

Théorème

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, a un point de U.
Si f présente un extremum local en a alors ses dérivées partielles en a sont nulles.

Définition

Un *point critique* de f est un point a tel que $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^2}$, *i.e.*, :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$$

Démonstration. Notons $a = (a_1, a_2)$.
Si f présente un maximum local en a, alors il existe une boule ouverte $B(a, r)$ incluse dans U telle que :

$$\forall (x, y) \in B(a, r) \qquad f(x, y) \leqslant f(a_1, a_2)$$

Dans ce cas les applications partielles en $a = (a_1, a_2)$:

$$\varphi_1 : x \mapsto f(x, a_2) \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 : y \mapsto f(a_1, y)$$

présentent elles aussi un maximum au voisinage respectivement de a_1 et a_2. Ainsi $\varphi_1'(a_1) = \varphi_2'(a_2) = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$. $\square$

Remarque. Comme pour les fonctions d'une seule variable, la réciproque est fausse.

- Si les dérivées partielles de f en a sont nulles, alors les applications partielles ne présentent pas forcément un extremum, comme le montre l'exemple de la fonction $(x, y) \mapsto x^3 + y^3$.
- Si les dérivées partielles de f sont nulles, et si les applications partielles présentent un extremum toutes les deux, alors là encore f ne présente pas forcément un extremum, comme le montre l'exemple de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

  Il s'agit d'un *point-selle* ou *point-col*.
- Enfin si les applications partielles de f présentent toutes deux un extremum de même nature, alors là encore f ne présente pas obligatoirement un extremum, comme le montre l'exemple de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 3xy$.

Méthode

Pour déterminer les extrema d'une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$, on cherche les points a où les dérivées partielles s'annulent, *i.e.*, les points critiques.

On détermine si chacun d'entre eux est un maximum, un minimum, ou un point-selle.

Exemple 4. Déterminer les extrema de :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & 3x^2 + y^2 - 2x^3 \end{array}$$

▷ **Exercice 3.**