Corrigé partiel du T. D. B7
Polynômes

① Calculer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

a. $A = X^3 + 3X^2 + X - 3$ $B = X + 5$
b. $A = 2X^4 + 4X^3 - 5X + 1$ $B = 2X^2 + 1$
c. $A = 3X^2 + 6X + 5$ $B = iX + 1 + i$

a. On obtient : $Q = X^2 - 2X + 11$ $R = -58$
b. On obtient : $Q = X^2 + 2X - \frac{1}{2}$ $R = -7X + \frac{3}{2}$
c. On obtient : $Q = -3iX + (3 - 3i)$ $R = -1$

② Soit $P = X^7(X-3)^3$.
Calculer $P^{(9)}$ en utilisant la formule de Leibniz.

On obtient $P^{(9)} = 10!X - 9 \times 9!$, ce qui se vérifie directement.

③ Appliquer la formule de Taylor pour

a. $P = 2X^2 + 7X + 7$ en $a = -2$
b. $Q = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$ en $a = 3$
Résoudre l'équation : $Q(X) = 0$

a. $P = 1 - (X+2) + 2(X+2)^2$
b. $P = (X+3)^3 - (X+3)$
On calcule $P = (X+2)(X+3)(X+4)$, donc les racines sont 2, 3 et 4.

④ Résoudre l'équation :

$$x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 12x = 0$$

$P = X(X-2)(X^3 + X^2 - 4X + 6) = X(X-2)(X+3)(X^2 - 2X + 2)$
Les racines sont 0, 2, -3, $1+i$ et $-i$.

⑤ Factoriser :

$$P = 2X^6 + 7X^5 + X^4 - 14X^3 - 8X^2 + 7X + 5$$

Pour ceci, trouver deux racines évidentes et déterminer leurs ordres de multiplicité.

On obtient $P = (X-1)^2(X+1)^3(2X+5)$.

⑥ Résoudre le système :

$$\begin{cases} xy &= 24 \\ x^2 + y^2 &= 73 \end{cases}$$

Le système implique $(x+y)^2 = 73 + 2 \times 24 = 12$, donc $x + y = \pm 11$.
Ainsi x et y sont les racines des polynômes $X^2 \pm 11X + 24$
Solutions : $\{3, 8\}$ et $\{-3, -8\}$

⑦ En considérant le polynôme unitaire dont x, y, z sont les racines, résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + xz + yz = -16 \\ xyz = 20 \end{cases}$$

x, y, z sont les racines de $P = X^3 + X^2 + 6X - 20 = (X+2)(X^2 - 3X - 10)$.
Les solutions sont $\{x, y, z\} = \{-2, -2, 5\}$.

⑧ Factoriser le polynôme :

$$P = X^3 - (1 + 6i)X - (6 - 2i)$$

On obtient $P = (X - i)(X^2 + iX - (2 + 6i)) = (X - i)(X - 2 - i)(X + 2 + 2i)$.

⑨ Calculer le PGCD de A et B dans les cas suivants :

a. $A = X + 2$ $\quad B = 6X + 11$
b. $A = 4X^2 - 1$ $\quad B = 2X^2 + 5X - 3$
c. $A = 2X^3 - X^2 - X - 3$ $\quad B = 4X^2 + 4X - 15$
d. $A = X^n - \alpha^n$ $\quad B = (X - \alpha)^n$
avec $(\alpha, n) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{N}^*$

a. 1 b. $X - \frac{1}{2}$ c. $X - \frac{3}{2}$ d. $X - \alpha$

(10) Déterminer des coefficients de Bézout pour :

$$A = (X-4)(X-1) \quad \text{et} \quad B = (X-2).$$

$U = -\frac{1}{2}$ et $V = \frac{1}{2}(X-3)$ conviennent.

(11) Soit A, B, C trois polynômes non-nuls avec C unitaire.
Démontrer que $(AC) \vee (BC) = (A \vee B)C$.

On utilise $(A \vee B)\mathbb{K}[X] = A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$.
Il faut justifier que si $P\mathbb{K}[X] = Q\mathbb{K}[X]$ alors P et Q sont associés.
On obtient que $(AC) \vee (BC)$ et $(A \vee B)C$ sont associés. Comme ils sont unitaires alors ils sont égaux.

1 Donner la forme développée du polynôme P puis la forme factorisée du polynôme Q avec :

$$P = (X^3 + X^2 + X + 1)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k X^k \qquad \text{et} \qquad Q = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\tfrac{1}{k+1} + \tfrac{n+2}{k+2}X\right)X^k$$

On obtient $P = 1 + X^2 + X^{2n+1} + X^{2n+3}$ et $Q = (X+1)^{n+1}$.

2 Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

a. $A = X^6 + 1 \qquad B = X^3 + X^2 + X + 1$
b. $A = 2X^4 - 11X^3 + 7X^2 + 6X - 2$
   $B = 2X^2 - 5X + 2$
c. $A = X^{20} - 2X^{15} + 3X^{10} - 4X^5 + 5$
   $B = X^7 + X^2$
d. $A = X^5 + iX^4 \qquad B = X^2 + 1$

a. $Q = X^3 - X^2 \qquad R = X^2 + 1$
b. $Q = X^2 - 3X - 5 \qquad R = -13X + 8$
c. $Q = X^{13} - 3X^8 + 6X^3 \qquad R = -10X^5 + 5$
d. $Q = X^3 + iX^2 - X - i \qquad R = X + i$

$\boxed{3}$ Soit n un entier naturel, θ, a, b trois scalaires avec $a \neq b$.

Déterminer le reste de la division euclidienne de :

a. X^n par $(X-a)$, puis par $(X-a)(X-b)$, puis par $(X-a)^2$
b. $((\sin\theta)X+\cos\theta)^n$ par X^2+1
c. $X^{2n}+X^n+1$ par X^2+X+1

a. Les restes sont respectivement :
- $R_n = a^n$ (spécialiser en a)
- $R_n = \frac{1}{a-b}[(a^n-b^n)X-(ba^n-ab^n)] = \frac{1}{a-b}[a^n(X-b)-b^n(X-a)]$
  (Spécialiser en a et en b)
- $R_n = a^{n-1}[nX+(1-n)a] = na^{n-1}(X-a)+a^n$
  (Spécialiser en a, dériver, spécialiser en a. Ou utiliser la formule de Taylor).

b. $R_n = (\sin(n\theta)X+\cos(n\theta))$ (spécialiser en $\pm i$).
c. $R_n = 3$ si n est multiple de 3, 0 sinon (spécialiser en j et j^2).

$\boxed{4}$ On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3+7x^2-2x+5}{x^2+6x+13}$$

Grâce à une division euclidienne :

a. Démontrer que f possède une asymptote en $\pm\infty$ et en donner une équation.
b. Calculer une primitive de f.

a. La division euclidienne du numérateur par le dénominateur donne :

$$f(x) = 2x-5+\frac{2x+70}{x^2+6x+13}$$

La droite d'équation $y = 2x-5$ est donc asymptote à la courbe.

b. On obtient : $F(x) = x^2-5x+\ln\left(x^2+6x+13\right)+32\arctan\frac{x+3}{2}$

$\boxed{5}$ Soit a, b deux réels et n un entier naturel. Soit $R = PQ$ avec :

$$P = (X-a)^n \quad \text{et} \quad Q = (X-b)^n$$

a. Donner $P^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
b. Calculer $R^{(n)}$. Simplifier son expression dans le cas où $a = b$.
c. En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

Obtient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2 = \binom{2n}{n}$

$\boxed{6}$ On considère les polynômes :

$$A = X^9 - X^8 - 4X^7 + 7X^6 + X^5 - 10X^4 + 6X^3 + 3X^2 - 4X + 1$$
$$B = X^5 - X^4 - 2X^3 + 2X^2 + X - 1$$

Factoriser B et démontrer qu'il divise A.

$B = (X-1)^3(X+1)^2$, 1 est bien racine triple de A et -1 est bien racine double de A.

$\boxed{7}$ Déterminer un polynôme P de degré minimal tel que $P + 10$ soit divisible par $(X-2)^2$ et $P - 12$ soit divisible par $(X+2)^2$.

On obtient $P = \frac{11}{16}X^3 - \frac{33}{4}X + 1$.

$\boxed{8}$ À quelle condition nécessaire et suffisante sur (λ,μ) le polynôme $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ est-il divisible par $(X+2)^2$?

On obtient $\lambda = -\frac{15}{2}$ $\quad\mu = -10$
Le quotient est alors $Q = X^2 - 3X + (\lambda + 8)$.

9 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants.

$P_1 = (X^2 - X + 1)^2 + 1$
$P_2 = X^4 + X^2 - 6$
$P_3 = X^7 - 125X^4 - 16X^3 + 2000$
$P_4 = 2X^3 - 2X^2 - 9X - 9$
$P_5 = (X^2 + X - 4)^2 + (X - 7)^2$
$P_6 = X^5 - 4X^3 + 10X^2 - 13X + 6$

$$\begin{aligned}
P_1 &= (X+i)(X-1-i)(X-i)(X-1+i)\\
&= (X^2+1)(X^2-2X+2)\\
P_2 &= (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-i\sqrt{3})(X+i\sqrt{3})\\
&= (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X^2+3)\\
P_3 &= (X-2)(X+2)(X-2i)(X+2i)(X-5)(X-5j)(X-5j^2)\\
&= (X-2)(X+2)(X^2+4)(X-5)(X^2+5X+25)\\
P_4 &= 2(X-3)(X+1-\tfrac{i}{\sqrt{2}})(X+1+\tfrac{i}{\sqrt{2}})\\
&= 2(X-3)(X^2+2X+\tfrac{3}{2})\\
P_5 &= (X-2+i)(X-2-i)(X+3+2i)(X+3-2i)\\
&= (X^2-4X+5)(X^2+6X+13)\\
P_6 &= (X-1)^2(X+3)(X-\tfrac{1+i\sqrt{7}}{2})(X-\tfrac{1-i\sqrt{7}}{2})\\
&= (X-1)^2(X+3)(X^2-X+2)
\end{aligned}$$

10 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants.

$P_1 = X^6 - 1$
$P_2 = X^3 + 1$
$P_3 = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
$P_4 = X^4 + X^2 + 1$
$P_5 = X^8 - 1$

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \textstyle\prod_k \left(X - e^{ik\frac{\pi}{3}}\right) \qquad k = 0, \ldots, 5 \\
&= (X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1) \\
P_2 &= (X+1)(X+j)(X+j^2) \\
&= (X+1)(X^2-X+1) \\
P_3 &= (X+1)(X-j)(X+j)(X-j^2)(X+j^2) \\
&= (X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1) \\
P_4 &= (X-\zeta)(X-\zeta^2)(X-\zeta^4)(X-\zeta^5) \quad \zeta = e^{i\frac{\pi}{3}} \\
&= (X^2+X+1)(X^2-X+1) \\
P_5 &= \textstyle\prod_k \left(X - e^{ik\frac{\pi}{4}}\right) \qquad k = 0, \ldots, 7 \\
&= (X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)
\end{aligned}
$$

11 Soit n un entier strictement supérieur à 2 et :

$$P_n = X^n - nX + 1$$

a. Démontrer que P_n n'a que des racines simples.
b. Déterminer le nombre de ses racines réelles en fonction de n.

a. $P_n' = nX^{n-1} - n$, ses racines sont les $\zeta \in \mathbb{U}_{n-1}$.
$P_n(\zeta) = (1-n)\zeta + 1 \neq 0$
b. Si n est pair, P_n a deux racines, si n est impair P_n a trois racines.

12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $1 + X + X^n$ n'a que des racines simples.

Les racines ζ de P' vérifient $\zeta^{n-1} = \frac{1}{n}$, elles ne peuvent être racines de P.

13 Déterminer tous les polynômes vérifiant :

a. $P \circ P = P$
b. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$
c. $P(X+1) = P(X)$
d. $(X+3)P(X) = XP(X+1)$
e. $P'^2 = 4P$
f. $(X^2+1)P'' - 6P = 0$

a. X et $a_0 \in \mathbb{K}$
b. $P = \lambda(X^2-1)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
c. $P = a_0 \in \mathbb{K}$
d. On démontre que $P = X(X+1)(X+2)Q$ puis avec la question précédente : $P = \lambda X(X+1)(X+2)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.
e. $P = 0$ ou $P = (X+\alpha)^2$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$
f. Chercher le coefficient dominant. On obtient $P = \lambda(X^3+X)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

14 Soit P un polynôme non-nul vérifiant l'égalité :

$$(E): \quad P(X^2) = P(X+1)P(X).$$

a. Démontrer que si α est une racine de P alors α^{2^n} est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b. Démontrer que toute racine non-nulle de P est de module 1.
c. Démontrer que toute racine de P différente de 1 est élément de $1+\mathbb{U}$.
d. En déduire que seuls 0 et 1 peuvent être racines de P.
e. En déduire l'ensemble des polynômes vérifiant l'égalité (E).

a. Si α est racine alors α^2 est racine, puis α^{2^n} pour tout $n \in \mathbb{N}$. par récurrence.
b. Comme le nombre de racines est fini, alors il existe m et n distincts tels que $\alpha^{2^n} = \alpha^{2^m}$, donc $|\alpha| = 1$.
c. Si α est racine, alors $(\alpha-1)^2$ est racine, donc nul ou élément de $\mathbb{U}$. Donc $\alpha - 1$ est élément de $\mathbb{U}$.
d. Si $e^{i\frac{\pi}{3}}$ est racine, alors j est racine, mais j n'est pas dans $1+\mathbb{U}$. Donc seuls 0 et 1 sont racines.
e. En posant $P = \lambda X^a(X-1)^b$, on obtient $\lambda = 0$ ou 1 et $a = b$, donc $P = [X(X-1)]^a$, ou $P = 0$.

15 Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$:

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(X)}{k!}$$

Utiliser la formule du binôme pour X^n, puis la linéarité.
Sinon on raisonne par récurrence sur $n = \deg P$, en posant $P = a_n X^n + Q$.
On peut aussi appliquer la formule de Taylor.

16 Résoudre l'équation

$$x^3 - 8x^2 + 23x - 28 = 0$$

sachant que la somme de deux des solutions est égale à la troisième.

On obtient $\mathscr{S} = \left\{4, 2 \pm i\sqrt{3}\right\}$.

17 Factoriser le polynôme

$$8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$$

sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

On obtient $P = (2X+1)(2X-1)(2X-3)$.

18 Déterminer tous les réels x, y, z tels que :

$$x + y + z = xy + xz + yz = 3$$

Les scalaires x, y, z sont racines d'un polynômes $P = X^3 - 3X^2 + 3x + a$ où a est un réel.
On calcule $P = (X-1)^3 + a + 1$.
Les racines complexes sont donc $1 - \sqrt[3]{a+1}$, $1 - j\sqrt[3]{a+1}$, $1 - j^2\sqrt[3]{a+1}$.
Comme x, y, z sont réels alors $a = -1$ obligatoirement donc $x = y = z = 1$.

19 Soit A et B deux polynômes.

a. Démontrer que : $A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = (A \wedge B)\mathbb{K}[X]$

b. Soit C un autre polynôme. A-t-on : $(AC) \wedge (BC) = (A \wedge B)C$?

a. Inclusion directe : si un polynôme s'écrit $AU + BV$ alors il est multiple de $A \wedge B$.
Inclusion indirecte : utiliser la relation de Bézout.

b. En utilisant la question précédente on démontre que les polynômes $(AC) \wedge (BC)$ et $(A \wedge B)C$ sont associés.
Ils sont égaux si et seulement si C est unitaire.

20 Soit m et n deux entiers naturels non-nuls, soit r le reste de la division euclidienne de n par m, et $d = n \wedge m$.

a. Soit A, B, C trois polynômes. On suppose qu'il existe un polynôme V tel que $A + BV + C = 0$. Démontrer que $A \wedge B = B \wedge C$.

b. Démontrer que $X^m - 1$ divise $X^n - X^r$.
En déduire que $X^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$.

c. Démontrer que :
$$(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^m - 1) \wedge (X^r - 1)$$
puis que $(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^d - 1)$.

a. On démontre que $A \wedge B$ et $B \wedge C$ sont diviseurs l'un de l'autre, donc associés, puis ils sont unitaires.

b. $X^n - X^r = X^r(X^{qm} - 1)$ et $X^m - 1$ divise $X^{qm} - 1$.
Ensuite $X^n - 1 = X^r(X^{qm} - 1) + X^r - 1$.

c. On utilise la question précédente puis l'algorithme d'Euclide.

21 Soit m et n deux entiers naturels non-nuls, et $d = m \wedge n$.

a. Soit a un diviseur de n. Justifier que $\mathbb{U}_a \subseteq \mathbb{U}_n$.

b. Démontrer que $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_d$.

c. En déduire que $(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^d - 1)$.

a. Comme a divise n alors : $\zeta^a = 1 \implies \zeta^n = 1$.

b. L'inclusion indirecte est conséquence de la question précédente.
L'inclusion directe se démontre grâce à la relation de Bézout.

c. On utilise $(X^n - 1) = \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} (X - \zeta)$.
Les racines communes de $X^n - 1$ et $X^m - 1$ sont les éléments de $\mathbb{U}_d$.

22 Soit $A_1, \ldots, A_n$ une famille de polynômes premiers entre eux deux à deux. Pour tout $k = 1, \ldots, n$ on pose :

$$B_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} A_i$$

Démontrer que les polynômes $B_1, \ldots, B_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Soit P irréductible divisant tous les B_k. Alors il divise B_1, donc il existe $i \neq 1$ tel que P divise A_i.

Mais P divise B_i, donc il existe $j \neq i$ tel que P divise A_j. Donc P divise $A_i \wedge A_j$, ce qui impose $P = 1$.

23 **Polynômes de Tchebychev**

Soit (P_n) la suite de polynômes définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

a. Calculer P_n pour n compris entre 0 et 5.

b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de P_n.

c. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(nx) = P_n(\cos x)$$

d. Quelles sont les racines du polynôme P_n ?

a. $P_2 = 2X^2 - 1 \qquad P_3 = 4X^3 - 3X \qquad P_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1 \qquad P_5 = 16X^5 - 20X^3 + X$

b. On démontre par récurrence double : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \deg P_n = n$

c. On utilise encore une démonstration par récurrence double.

d. Les n racines de P_n sont $\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$ pour k allant de 0 à $n-1$, donc les cosinus de $\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{2n}$.

24 Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soit α_0, α_1, α_2 trois scalaires distincts et :

$$\begin{aligned} P_0 &= (X-\alpha_1)(X-\alpha_2) \\ P_1 &= (X-\alpha_0)(X-\alpha_2) \\ P_2 &= (X-\alpha_0)(X-\alpha_1) \end{aligned}$$

a. Calculer $P_i(\alpha_j)$ pour tous i et j allant de 0 à 2.

Pour tout $i = 0, 1, 2$ on pose : $\quad L_i = P_i/P_i(\alpha_i)$

b. Démontrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{K}_2[X]$:

$$P = \sum_{i=0}^{2} P(\alpha_i) L_i$$

c. Soit $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ trois scalaires. Démontrer qu'il existe un et un seul polynôme de degré au plus 2 tel que pour tout $i = 0, 1, 2$: $\quad P(\alpha_i) = \beta_i$.

d. Application : déterminer l'unique parabole passant par les points de coordonnées $(-1, 1)$, $(2, 1)$, $(4, 11)$.

a. $P_i(\alpha_j) = 0$ si $i \neq j$, sinon $P_0(\alpha_0) = (\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_2)$, etc.

b. Par définition des L_i : $\quad L_i(\alpha_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Posons $Q = \sum_{i=0}^{2} P(\alpha_i) L_i$. Alors $Q(\alpha_i) = P(\alpha_i)$ pour $i = 0,\ 1,\ 2$.

Le polynôme $P - Q$ est de degré au plus 2 et admet au moins trois racines donc il est nul.

c. Soit $P = \sum_{k=0}^{2} \beta_i L_i$. Alors P est de degré au plus 2 et vérifie $P(\alpha_i)) = \beta_i$ pour tout $i = 0, 1, 2$.

Ceci démontre l'existence.

Si P est un polynôme de degré au plus 2 vérifiant $P(\alpha_i) = \beta_i$ pour tout $i = 0, 1, 2$, alors $P = \sum_{k=0}^{1} \beta_i L_i$ d'après la question précédente.

Ceci démontre l'unicité.

d. D'après la question précédente le polynôme $P = L_0 + L_1 + 11L_2$ convient.

On obtient $P = X^2 - X - 1$.