

Corrigé partiel du T. D. A9 Suites

1 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^2}{4}$$

- Démontrer que (u_n) est majorée et croissante.
- Démontrer que (u_n) est convergente et donner sa limite.
- On suppose maintenant que $u_0 = 3$. Démontrer que la suite (u_n) admet une limite et donner cette limite.

On note $f : x \mapsto 1 + \frac{x^2}{4}$ l'itératrice de la suite (u_n) . Sa courbe est une parabole que l'on peut tracer.

On démontre que f admet 2 pour unique point fixe.

L'intervalle \mathbb{R}_+ est stable par f et $u_0 \in \mathbb{R}_+$ donc la suite (u_n) est incluse dans \mathbb{R}_+ .

Comme f est croissante sur \mathbb{R}_+ alors la suite (u_n) est monotone.

On montre que $u_1 \geq u_0$ (quel que soit la valeur de u_0) donc la suite (u_n) est croissante.

On démontre qu'elle est majorée par 2 donc elle converge vers 2.

Si $u_0 = 3$ alors on démontre par l'absurde qu'elle n'est pas convergente, et par théorème de la limite monotone elle tend vers $+\infty$.

2 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}$$

- Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et décrire ses variations.
- Démontrer que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent et donner leurs limites.
- Démontrer que la suite (u_n) converge.

a. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ l'itératrice de la suite (u_n) .

Comme \mathbb{R}_+ est stable par f et $u_0 \in \mathbb{R}_+$ alors la suite (u_n) est bien définie et incluse dans \mathbb{R}_+ .

Comme f est décroissante sur \mathbb{R}_+ alors la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante, même à partir d'un certain rang.

b. Les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) vérifient la relation $v_{n+1} = g(v_n)$ avec $g = f \circ f$, i.e., $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

La fonction g est croissante sur \mathbb{R}_+ donc les suites extraites sont monotones.

On démontre que l'une est croissante majorée par $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et l'autre décroissante minorée par α , on en déduit qu'elles convergent et leur limite est α .

- c. Par théorème, comme (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite alors la suite (u_n) converge vers cette limite, c'est-à-dire vers α .

3 Déterminer les termes généraux des suites définies par :

- a. $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n - 8$
- b. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3 - u_n$
- c. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$.

a. $u_n = 8 - 2^{n+2}$ b. $u_n = \frac{1}{2}(3 + (-1)^n)$ c. $u_n = 4(2^{-n} - 1)$.

4 Déterminer les termes généraux des suites définies par :

- a. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$
- b. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$
- c. $u_0 = 2, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 24u_n$
- d. $u_0 = 1, u_1 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = -6u_{n+1} - 9u_n$
- e. $u_0 = 2, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$

Donner une forme réelle de cette suite.

- f. $u_0 = 1, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \sqrt{3}u_{n+1} - u_n$

Démontrer que cette suite est périodique.

- a. $u_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$
- b. $u_n = n$
- c. $u_n = \frac{1}{10}(7.6^n + 13(-4)^n)$
- d. $u_n = (1 + \frac{n}{3})(-3)^n = -(n+3)(-3)^{n-1}$
- e. $u_n = (1+i)^{(n+1)} + (1-i)^{(n+1)} = \sqrt{2}^{(n+3)} \cos \frac{(n+1)\pi}{4}$
- f. $u_n = \alpha e^{i\frac{\pi}{6}} + \beta e^{-i\frac{\pi}{6}}$ avec $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}(2 - \sqrt{3})$ et $\beta = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}(2 - \sqrt{3})$
ou $u_n = \cos \frac{n\pi}{6} + (2 - \sqrt{3}) \sin \frac{n\pi}{6}$

Cette suite est 12-périodique.

5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$u_n = \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2} \right)^n$$

- Trouver une relation de récurrence double vérifiée par la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Démontrer que tous les u_n sont entiers.

On calcule que $u_0 = 2$ et $u_1 = 1$.

On démontre que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n$

En effet, si une suite vérifie une telle relation de double-récurrence alors il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2} \right)^n.$$

Si $u_0 = 2$ et $u_1 = 1$ alors on obtient bien $\alpha = \beta = 1$, donc il s'agit de la suite (u_n) .

Par récurrence double on démontre que la suite (u_n) est entière.

6 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 > 0$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$$

Démontrer que cette suite converge et exprimer sa limite en fonction de u_0 et u_1 .

Par récurrence double la suite (u_n) est strictement positive.

On pose $v_n = \ln u_n$.

Alors $v_{n+2} = \frac{1}{2}(v_n + v_{n+1})$. On démontre qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2} \right)^n.$$

On obtient $\alpha = \frac{1}{3} \ln u_0$ et $\beta = \frac{2}{3} \ln u_0$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^n}$

Cette suite converge vers $\sqrt[3]{u_0}$.

7 Soit A une matrice carrée inversible de taille (n, n) satisfaisant $A + A^{-1} = I_n$.

Calculer $A^p + A^{-p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

En développant $(A + A^{-1})^2$ on montre que $A^2 + A^{-2} = -I_n$.

De même on montre que $A^3 + A^{-3} = -2I_n$.

On démontre par récurrence qu'il existe une suite $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que $A^p + A^{-p} = a_p I_n$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On obtient $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, puis $a_{p+1} = a_p - a_{p-1}$.

On reconnaît une suite double-récurrente. On obtient $a_p = \alpha e^{i \frac{p\pi}{3}} + \beta e^{-i \frac{p\pi}{3}}$ avec $\alpha = \beta = 1$, puis $a_p = 2 \cos \frac{p\pi}{3}$.

Finalement : $\forall p \in \mathbb{N} \quad A^p + A^{-p} = 2 \cos \frac{p\pi}{3} I_n$

Un exemple de telle matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8 Soit (u_n) une suite complexe définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + \overline{u_n}}{3}$$

Étudier la limite de cette suite.

On note x_n et y_n les parties réelles et imaginaires respectivement de u_n .

On démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = x_0$ et $y_n = \frac{y_0}{3^n}$

Donc (u_n) converge vers $x_0 = \operatorname{Re}(u_0)$.

9 Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles vérifiant pour tout entier n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 2v_n) + 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) - 2 \end{cases}$$

Étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n) . *On pourra utiliser les complexes.*

On définit : $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = u_n + iv_n$.

On obtient alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} = \frac{1+2i}{3}z_n + 2 - 2i$

Cette suite est arithmético-géométrique.

On calcule son terme général : $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = 3 + (z_0 - 3)\left(\frac{1+2i}{3}\right)^n$

Comme $\left|\frac{1+2i}{3}\right| < 1$ alors la suite (z_n) converge vers 3.

Donc les suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers 3 et 0.

10 Soit q un nombre complexe de module 1.

Démontrer que la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $q = 1$.

On pourra considérer la suite $(q^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Si $q = 1$ alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 1 donc elle converge vers 1.

Réiproquement, supposons que la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et notons ℓ sa limite.

La suite $(|q^n|)$ est constante égale à 1, donc elle converge vers 1, ce qui montre que $|\ell| = 1$, et donc ℓ est non-nul.

Par décalage la suite $(q^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers ℓ .

Par quotient la suite $\left(\frac{q^{n+1}}{q^n}\right)$ converge vers $\frac{\ell}{\ell} = 1$. Or cette suite est égale à q , donc $q = 1$.

11 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ puis :

$$v_n = u_n - 2\sqrt{n} \quad w_n = u_n - 2\sqrt{n+1}$$

- Démontrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
- En déduire que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
- Démontrer que $u_n \sim 2\sqrt{n}$.

a. On démontre que (v_n) est décroissante, (w_n) est croissante, et $(v_n - w_n)$ converge vers 0. Pour ceci on utilise des quantités conjuguées, et on considère $w_n - w_{n-1}$ plutôt que $w_{n+1} - w_n$.

b. Par théorème les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite.

Comme $u_n = v_n + 2\sqrt{n}$ alors (u_n) tend vers $+\infty$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{u_n}{2\sqrt{n}} = \frac{v_n}{2\sqrt{n}} + 1$.

Comme (v_n) est convergente et $(2\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$ alors $\frac{v_n}{2\sqrt{n}}$ converge vers 0.

Ainsi $\frac{u_n}{2\sqrt{n}}$ converge vers 1 et $u_n \sim 2\sqrt{n}$.

12 Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 12$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases}$$

- Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
- Calculer leur limite.

On démontre :

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{6}(v_n - u_n)$

La suite $(v_n - u_n)$ est géométrique, donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n - u_n = \frac{12}{6^n}$.

Cette suite converge vers 0.

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \frac{6}{6^n} > 0$

Donc la suite (u_n) est croissante.

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{3}(v_n - u_n) = -\frac{4}{6^n} < 0$

Donc la suite (v_n) est décroissante.

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et donc par théorème elles convergent vers la même limite.

Pour calculer cette limite on peut remarquer que u_n est la somme des termes d'une suite géométrique. En effet par télescopage :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{6}{6^k} = \frac{36}{5} \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right)$$

Les suites (u_n) et (v_n) convergent vers $\frac{36}{5}$.

13 Soit A et B deux parties non-vides de \mathbb{R} telles que :

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b.$$

- Démontrer que A admet une borne supérieure et B admet une borne inférieure.
- Démontrer que $\text{Sup } A \leq \text{Inf } B$.

- Comme la partie B est non vide alors elle contient au moins un élément b_0 .

Ainsi : $\forall a \in A \quad a \leq b_0$.

Ceci montre que la partie A est majorée par b_0 .

La partie A est majorée et non-vide, donc par la propriété de la borne supérieure elle admet un plus petit majorant, *i.e.*, une borne supérieure.

De même la partie A admet un élément a_0 , lequel est un minorant de B . La partie B est non-vide minorée donc elle admet une borne inférieure.

- Soit b un élément de B . Alors b est un majorant de A , car : $\forall a \in A \quad a \leq b$.

Or $\text{Sup } A$ est le plus petit majorant de A , donc $\text{Sup } A \leq b$.

On a démontré que : $\forall b \in B \quad \text{Sup } A \leq b$.

Ainsi $\text{Sup } A$ est un minorant de B . Or la borne inférieure de B est par définition le plus grand minorant de B , donc $\text{Sup } A \leq \text{Inf } B$.

14 Soit A et B deux parties majorées non vides de \mathbb{R} .

a. Démontrer que si $A \subseteq B$ alors :

$$\text{Sup } A \leq \text{Sup } B$$

b. Démontrer que $A \cup B$ est majorée et que :

$$\text{Sup}(A \cup B) = \text{Max} \{ \text{Sup } A, \text{Sup } B \}$$

c. Démontrer que $A \cap B$ est majorée, et que si elle est non-vide alors :

$$\text{Sup}(A \cap B) \leq \text{Min} \{ \text{Sup } A, \text{Sup } B \}$$

Montrer que l'égalité n'a pas lieu en général.

d. On note $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$.

Démontrer que $A + B$ est majorée et que :

$$\text{Sup}(A + B) = \text{Sup } A + \text{Sup } B$$

Comme les parties A et B sont non-vides majorées alors elles admettent une borne supérieure chacune, *i.e.*, $\text{Sup } A$ et $\text{Sup } B$ sont définies.

a. Supposons que $A \subseteq B$.

La borne supérieure de B est un majorant de B , donc : $\forall b \in B \quad b \leq \text{Sup } B$.

Comme $A \subseteq B$ alors : $\forall a \in A \quad a \in B \quad$ donc $a \leq \text{Sup } B$.

Ceci montre que $\text{Sup } B$ est un majorant de A . Or $\text{Sup } A$ est le plus petit majorant de A , donc $\text{Sup } A \leq \text{Sup } B$.

b. Soit $M = \text{Max} \{ \text{Sup } A, \text{Sup } B \}$.

Comme $\text{Sup } A$ est un majorant de A et $\text{Sup } A \leq M$ alors M est un majorant de A .

De même M est un majorant de B .

Ainsi M est un majorant de A et de B . Si x est un élément de $A \cup B$ alors $x \in A$ ou $x \in B$, donc $x \leq \text{Sup } A \leq M$ ou $x \leq \text{Sup } B \leq M$, et finalement $x \leq M$.

Ceci montre que M est un majorant de $A \cup B$.

La partie $A \cup B$ est non-vide car A et B sont non-vides, elle est majorée, donc elle admet une borne supérieure. Comme M en est un majorant alors $\text{Sup}(A \cup B) \leq M$.

En effet la borne supérieure de $A \cup B$ est son plus petit majorant.

Comme $A \subseteq A \cup B$ et $B \subseteq A \cup B$ alors d'après la question (a) :

$$\text{Sup } A \leq \text{Sup}(A \cup B) \quad \text{et} \quad \text{Sup } B \leq \text{Sup}(A \cup B).$$

On en déduit $\text{Max} \{ \text{Sup } A, \text{Sup } B \} \leq \text{Sup}(A \cup B)$, *i.e.*, $M \leq \text{Sup}(A \cup B)$.

Par antisymétrie : $\text{Sup}(A \cup B) = \text{Max} \{ \text{Sup } A, \text{Sup } B \}$.

c. Comme $A \cap B \subseteq A$ et A est majorée alors d'après la question (a) $A \cap B$ est majorée.

Si de plus elle est non-vide alors elle admet une borne supérieure.

D'après la question (a), comme $A \cap B \subseteq A$ et $A \cap B \subseteq B$ alors :

$$\text{Sup}(A \cap B) \leq \text{Sup } A \quad \text{et} \quad \text{Sup}(A \cap B) \leq \text{Sup } B.$$

Ceci montre que $\text{Sup}(A \cap B) \leq \text{Min} \{ \text{Sup } A, \text{Sup } B \}$.

Montrons par un exemple que cette inégalité peut être stricte.

Soit $A = [0, 2]$ et $B = [0, 1] \cup [3, 4]$. Alors $A \cap B = [0, 1]$.

De plus $\text{Sup } A = 2$, $\text{Sup } B = 4$ et $\text{Sup}(A \cap B) = 1 < \text{Min}\{\text{Sup } A, \text{Sup } B\} = 2$.

L'inégalité est stricte.

d. Notons $a = \text{Sup } A$ et $b = \text{Sup } B$.

Alors a est un majorant de A et b est un majorant de B , donc :

$$\forall (x, y) \in A \times B \quad x + y \leq a + b.$$

Ceci montre que $a + b$ est un majorant de $A + B$.

La partie $A + B$ est non-vide car A et B sont non-vides, elle est majorée donc elle admet une borne supérieure.

Comme $a + b$ est un majorant de $A + B$ alors $\text{Sup}(A + B) \leq a + b$.

Deux méthodes pour démontrer l'inégalité inverse :

Méthode 1. Soit $\varepsilon > 0$. alors $a - \frac{\varepsilon}{2} < a$ donc $a - \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un majorant de A , puisque a est le plus petit majorant de A . Donc il existe $x \in A$ tel que $a - \varepsilon < x$. De même il existe $y \in B$ tel que $b - \frac{\varepsilon}{2} < y$.

On a donc par somme : $a + b - \varepsilon < x + y$.

Or $x + y \in A + B$, et $\text{Sup}(A + B)$ est un majorant de $A + B$, donc $x + y \leq \text{Sup}(A + B)$.

On a démontré :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad a + b - \varepsilon < \text{Sup}(A + B).$$

Ceci donne $a + b \leq \text{Sup}(A + B)$, puis par antisymétrie :

$$\text{Sup}(A + B) = a + b = \text{Sup } A + \text{Sup } B.$$

Méthode 2. Par propriété du cours, si $a = \text{Sup } A$ alors il existe une suite d'éléments de A convergeant vers a .

Soit (a_n) une telle suite, et de même soit (b_n) une suite d'éléments de B convergeant vers b .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n$ appartient à $A + B$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n + b_n \leq \text{Sup}(A + B)$$

Comme (a_n) converge vers a et (b_n) converge vers b alors par théorème de comparaison :

$$a + b \leq \text{Sup}(A + B).$$

Enfin par antisymétrie :

$$\text{Sup}(A + B) = a + b = \text{Sup } A + \text{Sup } B.$$

15 Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ croissante, et :

$$A = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq x\}.$$

- a. Démontrer que A possède une borne supérieure.
- b. Soit s la borne supérieure de A . Démontrer que s est un point fixe de f , i.e., que $f(s) = s$.

- a. A est majorée par 1, non-vide car elle contient 0, donc elle possède une borne supérieure.
- b. Si $x \in A$ alors $x \leq s$, donc par croissance $f(x) \leq f(s)$.

Or $x \leq f(x)$ car $x \in A$, donc $x \leq f(s)$.

Ceci montre que $f(s)$ est un majorant de A , et donc $s \leq f(s)$.

Si on suppose que $s < f(s)$, alors il existe $t \in [0, 1]$ tel que $s < t < f(s)$.

Mais alors par croissance $f(s) \leq f(t)$, donc $t \leq f(t)$, puis $t \in A$.

Ceci contredit le fait que s est un majorant de A , et donc $s = f(s)$.

16 Soit A une partie de \mathbb{R} non majorée.

Démontrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A tendant vers $+\infty$.

Comme la partie A n'est pas majorée alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $u_n \in A$ tel que $u_n \geq n$.

Par théorème de comparaison la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

17 Soit (u_n) une suite et ℓ un réel. Que signifient, ou qu’impliquent les propositions suivantes ?

- a. $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$
- b. $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$
- c. $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$
- d. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$
- e. $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$
- f. $\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$
- g. $\exists N \in \mathbb{N} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$
- h. $\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

a. (u_n) est constante égale à ℓ .

b. (u_n) est bornée.

c. (u_n) est bornée.

d. (u_n) converge vers ℓ .

e. (u_n) est stationnaire en ℓ .

f. (u_n) est constante égale à ℓ .

g. (u_n) est bornée.

h. (u_n) est bornée.

18 Soit (u_n) une suite réelle. Traduire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs :

- a. La suite (u_n) est bornée.
- b. La suite (u_n) est stationnaire.
- c. La suite (u_n) n'est pas croissante.
- d. La suite (u_n) n'est croissante à partir d'aucun rang.
- e. La suite (u_n) ne converge pas vers 0.

a. $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M$

b. $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies u_n = u_{n+1}$

c. $\exists n \in \mathbb{N} \quad u_n > u_{n+1}$

d. $\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \text{ et } u_n > u_{n+1})$

e. $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \text{ et } |u_n| > \varepsilon$

19 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel a élément de $[0, 1[$. Le but de cet exercice est de démontrer que la suite (u_n) converge vers 0.

- On pose $b = \frac{1+a}{2}$. Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq p \quad u_{n+1} \leq bu_n$
- Pour tout entier naturel n , donner une majoration de u_{n+p} en fonction de b , n et u_p .
- Conclure.

Seconde démonstration :

- Démontrer que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang, puis qu'elle est convergente, et enfin que sa limite ne peut être non-nulle.

Applications :

- Démontrer que la suite $(n!)$ est négligeable devant la suite (n^n) .
- Démontrer que pour tout réel $\alpha > 1$ la suite (n^α) est négligeable devant la suite $((n!)^\alpha)$.

- a. Soit $\varepsilon = b - a$. Alors $\varepsilon = \frac{1-a}{2}$ et comme $a < 1$ alors $\varepsilon > 0$.

La suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers a donc par définition de la convergence il existe un entier p tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - a \right| \leq \varepsilon$$

Ceci donne $\frac{u_{n+1}}{u_n} - a \leq b - a$ puis $u_{n+1} \leq bu_n$ car u_n est positif, par supposition de l'énoncé.

On a donc justifié qu'il existe un entier p tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} \leq bu_n$$

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la propriété :

$$\mathcal{P}_n \quad u_{n+p} \leq b^n u_p$$

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $n = 0$ la propriété est : $u_p \leq b^0 u_p$. Elle est valide car $b^0 = 1$.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la propriété est valide.

D'après la question précédente, comme $n + p \geq p$ alors

$$u_{n+p+1} \leq bu_{n+p}$$

L'hypothèse de récurrence est :

$$u_{n+p} \leq b^n u_p$$

On obtient par transitivité :

$$u_{n+p+1} \leq b^{n+1} u_p$$

Ceci montre que la propriété est vraie au rang $n + 1$, et donc justifie l'hérédité.

Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+p} \leq b^n u_p$

c. La suite (u_n) est supposée strictement positive, donc la question précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_{n+p} \leq b^n u_p$$

On remarque que $b < 1$. En effet par hypothèse $a < 1$ donc $b = \frac{a+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$.

Ceci implique que la suite $(b^n u_p)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Par théorème d'encadrement la suite $(u_{n+p})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Par décalage la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

d. La suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a . Comme $a < 1$ alors à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

En effet, si on pose $\varepsilon = 1 - a$ alors $\varepsilon > 0$ donc à partir d'un certain rang :

$$a - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a + \varepsilon = 1$$

Comme (u_n) est strictement positive, alors ceci montre qu'à partir d'un certain rang : $u_{n+1} \leq u_n$

Or la suite (u_n) est minorée par 0. Elle est décroissante à partir d'un certain rang et minorée par 0 donc par théorème elle converge.

Soit ℓ sa limite.

Comme la suite (u_n) est positive alors par théorème de comparaison $\ell \geq 0$. En effet :

$$(\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0) \implies \lim u_n \leq 0$$

On raisonne par l'absurde en supposant que $\ell > 0$.

Dans ce cas par décalage (u_{n+1}) converge vers ℓ , puis par quotient $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{\ell}{\ell} = 1$. Or nous savons que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers a et que $a < 1$. Cette contradiction montre que $\ell = 0$.

Nous avons donc de nouveau démontré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

e. Posons $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Ceci est défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite (u_n) est strictement positive et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

Ceci donne

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{n \ln \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}$$

Comme $-\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ alors par équivalence usuelle : $\ln \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{n+1}$

Par produit $n \ln \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{n}{n+1} \sim -1$. Ceci montre que $(n \ln \left(1 - \frac{1}{n+1}\right))$ converge vers -1 puis la fonction exponentielle étant continue, que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers e^{-1} .

Comme la suite (u_n) est strictement positive et $e^{-1} \in [0, 1[$, alors on peut appliquer le résultat démontré dans les question précédentes. Il implique que la suite (u_n) converge vers 0.

Ainsi $\frac{n!}{n^n}$ converge vers 0 donc par définition la suite $(n!)$ est négligeable devant la suite (n^n) : $n! = o(n^n)$

f. Soit α un réel tel que $\alpha > 1$. On pose maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{n^n}{(n!)^\alpha}$

On calcule, toujours pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^{(n+1)}}{n^n} \frac{(n!)^\alpha}{((n+1)!)^\alpha} = \frac{(n+1)^n}{n^n} (n+1) \left(\frac{1}{(n+1)} \right)^\alpha = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

$$\text{On écrit alors : } \frac{v_{n+1}}{v_n} = e^{n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

Comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ alors par équivalence usuelle : $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{n}$

Par produit $n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim 1$. La suite $(n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right))$ converge donc vers 1, puis l'exponentielle étant continue : $\left(e^{n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \right)$ converge vers $e^1 = e$.

La suite $\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right)$ converge vers 0 car $\alpha - 1 > 0$.

Par produit la suite $\left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right)$ converge vers 0.

Ainsi la suite $\left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right)$ converge vers un élément de $[0, 1[$, la suite (v_n) est strictement positive, donc d'après le résultat démontré dans les premières questions de l'exercice la suite (v_n) converge vers 0.

Ceci montre que la suite (n^n) est négligeable devant la suite $((n!)^\alpha)$: $n^n = o((n!)^\alpha)$

20 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On suppose que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

a. Démontrer que si la suite (u_n) est décroissante alors $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

b. Justifier que le résultat est faux si la suite (u_n) n'est pas supposée décroissante.

$$\text{Considérer par exemple } u_n = \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

a. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n-1} \geq u_n \geq u_{n+1}$, ce qui donne :

$$n(u_{n-1} + u_n) \geq 2nu_n \geq n(u_n + u_{n+1}).$$

Or par énoncé $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$ donc $(n(u_n + u_{n+1}))$ converge vers 1.

De plus par décalage $u_{n-1} + u_n \sim \frac{1}{n-1}$, puis :

$$n(u_{n-1} + u_n) = \frac{n}{n-1} \times (n-1)(u_{n-1} + u_n) \sim \frac{n}{n-1} \times 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1.$$

Par théorème d'encadrement la suite $(2nu_n)$ converge vers 1, et $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

b. Soit $u_n = \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $\frac{1}{2n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ alors $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Cependant on calcule :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n + u_{n+1} = \frac{2n+1}{2n(n+1)} + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

On montre que $\frac{2n+1}{2n(n+1)} \sim \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \sim \frac{1}{2n\sqrt{n}}$.

Comme $\frac{1}{n\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

Mais la suite (u_n) n'est pas équivalente à la suite $\left(\frac{1}{2n}\right)$, car $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

21 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1 + nu_n}$$

a. Démontrer que la suite (u_n) converge.

b. Déterminer sa limite.

c. Démontrer que $u_n = O\left(\frac{1}{(n-1)!}\right)$.

On démontre par quotient que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

Par récurrence elle est positive, donc minorée par 0.

Par théorème, la suite (u_n) est décroissante minorée par convergente.

Comme la suite (u_n) est minorée par 0 alors par théorème de comparaison sa limite est positive :

$$(\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 0) \quad \implies \quad \lim u_n \geq 0$$

Notons $\ell = \lim u_n$.

$$\text{On écrit : } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \frac{u_n \times \frac{u_n}{n}}{\frac{1}{n} + u_n}$$

Supposons que $\ell > 0$. Alors $\frac{u_n}{n} \rightarrow 0$ et $(\frac{1}{n} + u_n) \rightarrow \ell$ donc par produit et quotient $u_{n+1} \rightarrow 0$. Or par décalage (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ . Cette contradiction montre que $\ell = 0$.

Ainsi la suite (u_n) converge vers 0.

Pour démontrer que $u_n = O\left(\frac{1}{(n-1)!}\right)$ on pose $v_n = (n-1)!u_n$.

On montre que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{nu_n}{1+nu_n} < 1$, donc la suite (v_n) est décroissante. Elle est donc bornée (car elle est positive et majorée par v_1). Ainsi $u_n = O\left(\frac{1}{(n-1)!}\right)$.

22 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

- Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$ il existe un unique réel $u_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
- Démontrer que pour tout $n \geq 2$: $\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{2}{n}$
Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n \geq 2}$?
- Donner un équivalent simple de (u_n) .

a. La fonction f_n est dérivable, de dérivée : $f'_n(x) = n(x^{n-1} - 1)$.

Elle est donc strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$.

Elle est continue car polynomiale.

De plus $f_n(0) = 1$, $f_n(1) = 2 - n$ donc elle réalise une bijection de $[0, 1]$ dans $[2 - n, 1]$.

Soit $n \geq 2$. Alors $2 - n \leq 0$, donc $0 \in [2 - n, 1]$, et donc par définition d'une bijection il existe un et un seul $x_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

b. Comme $f_n(u_n) = 0$ alors $(u_n)^n = nu_n - 1$. Or $u_n \in [0, 1]$ donc $(u_n)^n \in [0, 1]$, et donc $nu_n - 1 \in [0, 1]$. Ceci donne $0 \leq nu_n - 1 \leq 1$, d'où le résultat.

On peut aussi remarquer que $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^n} > 0$ et $f_n(\frac{2}{n}) = (\frac{2}{n})^n - 1 < 0$, donc $f_n(\frac{1}{n}) > f_n(u_n) > f_n(\frac{2}{n})$ et comme f_n est strictement décroissante alors $\frac{1}{n} < u_n < \frac{2}{n}$.

On en déduit par encadrement que la suite (u_n) converge vers 0.

c. On peut également écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n^n} \leq u_n^n \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n = e^{n \ln \frac{2}{n}}$$

Par encadrement la suite $(u_n)^n$ converge vers 0 donc $(nu_n - 1)$ aussi, et ainsi $u_n \sim \frac{1}{n}$.

23 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = x^n + x - 1$.

- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
- Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
- Déterminer sa limite.
- Démontrer que $\frac{1}{n} = o(1 - u_n)$.

a. La fonction f_n est continue, strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* car sa dérivée est $f'_n(x) = nx^{n-1} + 1$.

Elle réalise donc une bijection de \mathbb{R}_+^* dans $]-1, +\infty[$.

Il existe donc un et un seul réel $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

b. Comme $f_n(u_n) = 0$ alors $u_n^n = 1 - u_n$, puis $f_{n+1}(u_n) = -(1 - u_n)^2$.

Comme f_{n+1} est strictement croissante et $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ alors $u_n < u_{n+1}$.

La suite (u_n) est donc croissante.

Comme $f_n(n) = 1$ alors u_n est majorée par 1.

Par théorème, la suite (u_n) est croissante majorée donc elle converge.

c. Soit $\ell = \lim u_n$. Alors $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$ car $u_1 = \frac{1}{2}$.

Si $\ell < 1$ alors u_n^n tend vers 0, donc u_n tend vers 1. Ainsi u_n tend vers 1.

d. Comme $f_n(1) = 1$ alors $0 < u_n < 1$, donc $u_n^n = 1 - u_n > 0$.

L'égalité $u_n^n = 1 - u_n$ donne $n \ln u_n = \ln(1 - u_n)$. Comme $u_n \rightarrow 1$ alors $\ln u_n \sim u_n - 1$, donc $n(u_n - 1) \sim \ln(1 - u_n)$. Ceci donne $n(u_n - 1) \rightarrow -\infty$, puis $\frac{1}{n} = o(1 - u_n)$.

24 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Converge-t-elle si :

- a. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent ?
- b. Les suites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent ?
- c. Les suites (u_{2n}) , (u_{3n}) et (u_{5n}) convergent ?
- d. La suite (u_n) est croissante et la suite (u_{2n}) converge ?

a. La réponse est négative. Exemple : $u_n = (-1)^n$.

b. La réponse est positive.

La suite (u_{6n}) est extraite des suites (u_{2n}) et (u_{3n}) donc elle converge vers leur limite, et ainsi celles-ci sont égales.

La suite (u_{6n+3}) est extraite des suites (u_{2n+1}) et (u_{3n}) donc elle converge vers leur limite, et ainsi celles-ci sont égales.

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite donc la suite (u_n) converge.

c. La réponse est négative.

Exemple : la suite $u_n = 1$ si n est une puissance de 7, 0 sinon.

d. La réponse est positive.

L'encadrement $u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_{2(n+1)}$ montre que la suite (u_{2n+1}) converge vers la même limite que la suite (u_{2n}) .

25 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \cos(\pi\sqrt{n})$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

La suite extraite (u_{n^2}) vérifie : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n^2} = \cos(\pi n) = (-1)^n$

Cette suite extraite diverge. Or toute suite extraite d'une suite convergente converge, donc la suite (u_n) diverge.

26 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite non majorée.

Démontrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) tendant vers $+\infty$.

On construit par récurrence une suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{\varphi(n)} \geq n$

Initialisation. Comme la suite u_n n'est pas bornée alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $u_m \geq 0$. On pose $\varphi(0) = m$, ainsi on a bien $u_{\varphi(0)} \geq 0$.

Hérité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'on a déterminé un entier $\varphi(n)$ tel que $u_{\varphi(n)} \geq n$.

La suite $(u_k)_{k > \varphi(n)}$ n'est pas majorée. En effet la suite $(u_k)_{0 \leq k \leq \varphi(n)}$ est finie donc majorée, donc si la suite $(u_k)_{k > \varphi(n)}$ était majorée alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ serait majorée, ce qui est supposé faux.

Il existe donc $k > \varphi(n)$ tel que $u_k \geq n + 1$. On pose $\varphi(n + 1) = k$. On a alors bien $u_{\varphi(n+1)} \geq n + 1$, et $\varphi(n + 1) > \varphi(n)$.

Conclusion. On a construit une fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{\varphi(n)} \geq n$$

La suite $(u_{\varphi(n)})$ ainsi construite est extraite de la suite (u_n) et tend vers $+\infty$ par théorème de comparaison.

27 Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N} \quad (p \geq N \text{ et } q \geq N) \implies |u_p - u_q| \leq \varepsilon$$

a. Démontrer que si une suite est convergente alors elle est de Cauchy.

b. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

(i) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

(ii) En déduire qu'elle est convergente.

a. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente, et soit ℓ sa limite.

Démontrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2})$$

Soit p et q deux entiers. D'après ce qui précède, si $p \geq N$ et $q \geq N$ alors :

$$|u_p - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |u_q - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$|(u_p - \ell) - (u_q - \ell)| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell|$$

On en déduit :

$$|u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On a démontré que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N} \quad (p \geq N \text{ et } q \geq N) \implies |u_p - u_q| \leq \varepsilon$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une suite de Cauchy.

- b. (i) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc en particulier pour $\varepsilon = 1$, comme $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N} \quad (p \geq N \text{ et } q \geq N) \implies |u_p - u_q| \leq 1$$

Si $q = N$ alors $q \geq N$ donc :

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N} \quad p \geq N &\implies |u_p - u_N| \leq 1 \\ &\implies u_N - 1 \leq u_p \leq u_N + 1 \end{aligned}$$

Tous les termes u_n de la suite pour $n \geq N$ sont dans l'intervalle $[u_N - 1, u_N + 1]$, donc ils forment un ensemble borné.

Les termes pour $0 \leq n < N$ sont en nombre fini donc ils forment un ensemble borné également.

Finalement la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

- (ii) La suite (u_n) est bornée donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass elle admet une suite extraite convergente.

Notons $(u_{\varphi(n)})$ une telle suite, c'est-à-dire que $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

Soit ℓ la limite de la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$.

Démontrons que la suite (u_n) converge vers ℓ .

Soit $\varepsilon > 0$.

Alors $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Comme la suite (u_n) est une suite de Cauchy alors :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N} \quad (p \geq N_1 \text{ et } q \geq N_1) \implies |u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit n un entier supérieur ou égal à N_1 . Comme la fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante alors par propriété $\varphi(n) \geq n$, et donc $\varphi(n) \geq N_1$.

Comme $n \geq N_1$ et $\varphi(n) \geq N_1$ alors : $|u_n - u_{\varphi(n)}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ alors par définition de la convergence il existe un entier N_2 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N_2 \implies |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $N_0 = \text{Max} \{N_1, N_2\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N_0$ alors $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$ donc :

$$|u_n - u_{\varphi(n)}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Par inégalité triangulaire :

$$|(u_n - u_{\varphi(n)}) + (u_{\varphi(n)} - \ell)| \leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ceci donne : $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Nous avons démontré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Ceci signifie que la suite (u_n) converge vers ℓ .

Ainsi toute suite de Cauchy est convergente.

Finalement les suites de Cauchy sont les suites convergentes.

28 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée.

Démontrer que la suite (u_n) converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Indication : Justifier que si la suite (u_n) ne converge pas vers ℓ alors il existe un réel $\varepsilon > 0$ et une suite extraite de (u_n) entièrement comprise hors de l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.

Si (u_n) converge alors sa limite ℓ est valeur d'adhérence.

Si a est une autre valeur d'adhérence alors il existe $(u_{\varphi(n)})$ convergeant vers a . Or toutes les suites extraites de (u_n) convergent vers ℓ , donc $\ell = a$.

Réiproquement supposons que la suite (u_n) admet une et une seule valeur d'adhérence, et notons ℓ celle-ci.

On raisonne par l'absurde en supposant que (u_n) ne converge pas vers ℓ . Ceci signifie :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon)$$

On fixe un tel ε . Alors il existe une infinité de termes u_n hors de l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$. Il existe donc une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ dont tous les termes sont hors de cet intervalle. Cette suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ est bornée car la suite (u_n) est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass elle admet une suite extraite convergente, que l'on note $u_{\varphi \circ \psi(n)}$.

Soit a la limite de cette dernière suite. Comme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon$$

alors par théorème de comparaison $|a - \ell| \geq \varepsilon > 0$, ce qui montre que $a \neq \ell$.

Or a est limite d'une suite extraite de (u_n) , donc a est valeur d'adhérence de (u_n) , alors que (u_n) n'a que ℓ pour valeur d'adhérence.

Cette contradiction montre que la suite (u_n) converge vers ℓ .

29 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive.

- a. On suppose qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positives convergeant vers 0 telles que :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_{n+p} \leq a_p u_n + b_n$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

- b. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive convergeant vers 0, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \sup_{j \geq n} \varepsilon_j$.

Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle converge vers 0.

- c. On suppose qu'il existe un réel K strictement supérieur à 1 et une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive convergeant vers 0 tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon_n}{K}$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

- a. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$: $b_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Puis il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq P$: $a_p u_N \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

On en déduit que pour tout $n \geq N + P$: $u_n \leq \varepsilon$.

- b. La suite (v_n) est bien définie car la suite (ε_n) est bornée, puisqu'elle converge vers 0.

La suite (v_n) converge vers 0 par conséquence de la définition de la convergence.

- c. On démontre par récurrence sur n , en fixant p :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+p} \leq \frac{u_n}{K^p} + \frac{1}{K^p} \sum_{i=0}^{p-1} K^i \varepsilon_{n+i}$$

Ceci donne :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+p} \leq \frac{u_n}{K^p} + \frac{1}{K-1} \sup_{j \geq n} \varepsilon_j$$

On applique le résultat de la question (a) avec $a_n = \frac{1}{K^n}$ et $b_n = \frac{1}{K-1} \sup_{j \geq n} \varepsilon_j$.

D'après la question (b) la suite $(\sup_{j \geq n} \varepsilon_j)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.