Corrigé partiel du T. D. B5
Matrices

7 Calculer les puissances n-èmes de la matrice :

$$F = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

On remarque que :

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3I_2 + 4E$$

Les matrices $3I_2$ et $4E$ commutent car $3I_2 \times 4E = 12E = 4E \times 3I_2$. On peut alors appliquer la formule du binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad F^2 = (3I_2 + 4E)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3I_2)^{n-k} (4E)^k$$

Ceci donne, n étant fixé :

$$F^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} 4^k E^k$$

Les puissances n-ème de la matrice E ont été calculées juste précédemment :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad E^k = \begin{cases} 3^{k-1}E & \text{si } k \geqslant 1 \\ I_3 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Ceci donne :

$$F^n = 3^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} 4^k 3^{k-1} E$$

Par linéarité de la somme :

$$F^n = 3^n I_3 + 3^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k \right) E$$

Pour calculer la somme on introduit le terme pour $k = 0$ puis on applique la formule du binôme :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k 1^{n-k} \right) - 1 = (4+1)^n - 1 = 5^n - 1$$

Ainsi :

$$F^n = 3^n I_3 + 3^{n-1}(5^n - 1)E = 3^{n-1}[3I_2 + (5^n - 1)E]$$

Ceci donne :

$$\boxed{F^n = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 5^n+2 & 5^n-1 & 5^n-1 \\ 5^n-1 & 5^n+2 & 5^n-1 \\ 5^n-1 & 5^n-1 & 5^n+2 \end{pmatrix}}$$

On vérifie rapidement que cette formule est effectivement correcte pour $n = 0$ et $n = 1$.

8 Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = 4u_n + 3v_n \end{cases}$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

a. Donner une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $X_{n+1} = AX_n$.
En déduire une expression de X_n en fonction de A, n et X_0.

b. Démontrer qu'il existe deux matrices A_1 et A_2 telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad A^n = 5^n A_1 + A_2$$

c. Exprimer les termes généraux des suites (u_n) et (v_n).

a. En posant $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = AX_n$.
Par récurrence immédiate, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$.

b. Si deux telles matrices A_1 et A_2 existent alors la formule est valable pour $n = 0$ et $n = 1$, ce qui donne :

$$I_2 = A_1 + A_2 \qquad \text{et} \qquad A = 5A_1 + A_2$$

Par combinaisons linéaires :

$$A_1 = \frac{1}{4}(A - I_2) \qquad \text{et} \qquad A_2 = \frac{1}{4}(5I_2 - A)$$

On pose donc :

$$A_1 = \frac{1}{4}(A - I_2) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_2 = I_2 - A_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

On démontre par récurrence que la propriété «$A^n = 5^n A_1 + A_2$» est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Le rang $n = 0$ est évident : $A_1 + A_2 = \frac{1}{4}(A - I_2) = +\frac{1}{4}(5I_2 - A) = I_2$.
Pour l'hérédité on écrit :

$$A^{n+1} = A^n A = (5^n A_1 + A_2)A = 5^n A_1 A + A_2 A$$

En calculant on obtient $A_1 A = 5A_1$ et $A_2 A = A_2$, ce qui démontre l'hérédité.

c. D'après les questions précédentes : $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = (5^n A_1 + A_2)X_0$.
Ceci donne $X_n = 5^n A_1 X_0 + A_2 X_0$. On calcule :

$$A_1X_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_2X_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ceci donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad X_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3.5^n + 1 \\ 6.5^n - 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{3.5^n + 1}{4} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{6.5^n - 2}{4}.$$

9 Soit $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

Calculer A^4. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Comme $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$ on obtient :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \qquad A^4 = 9I_3$$

On en déduit :

$$A\left(\tfrac{1}{9}A^3\right) = \left(\tfrac{1}{9}A^3\right)A = I_3$$

Ceci montre que A est inversible d'inverse :

$$A^{-1} = \tfrac{1}{9}A^3 = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\overline{A}$$

10 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 15 & -9 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que P est inversible et calculer son inverse.
b. Calculer $B = P^{-1}AP$.
c. Exprimer A^n en fonction de P, B et n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
d. Calculer B^n puis A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

a. La matrice P est inversible car son déterminant est égal à -1, il est non-nul.
On en déduit $P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

b. On obtient $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

c. L'égalité $B = P^{-1}AP$ donne $A = PBP^{-1}$, puis on démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A^n = PB^nP^{-1}$.

Comme B est diagonale alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $B^n = \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$.

On obtient ensuite $A^n = (-4)^n \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -15 & 6 \end{pmatrix} + (-3)^n \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$.

11 Reproduire l'exercice précédent avec :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -25 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a. On obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

b. On calcule $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Toujours par récurrence on démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A^n = PB^nP^{-1}$.

On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $B^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient ensuite $A^n = I_2 + n \begin{pmatrix} 10 & -25 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$.

12 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 13 \\ -4 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Justifier que A est inversible, calculer AB et en déduire que B n'est pas inversible.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non-nuls, donc elle est inversible.

Les opérations élémentaires ne changent pas le caractère inversible d'une matrice, donc par opération élémentaire $(C_1 \leftrightarrow C_3)$ on obtient que la matrice A est inversible.

On calcule :

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 28 \\ 5 & 10 & 20 \\ 9 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

Les opérations $(L_1 \leftarrow \frac{1}{7}L_1)$ et $(L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2)$ donnent :

$$AB \quad \text{inversible} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{inversible}$$

puis l'opération $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$ donne :

$$AB \quad \text{inversible} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{inversible}$$

Cette dernière matrice n'est pas inversible car sa seconde ligne est nulle.

Donc AB n'est pas inversible.

Si B était inversible alors par produit AB serait inversible, donc B n'est pas inversible.

$\boxed{13}$ On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 12 & 22 & -9 \\ -4 & -7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculer le produit AB, justifier que A et AB sont inversibles, et en déduire que B est inversible.

Calculer l'inverse de AB, puis celui de B.

La matrice A est inversible car elle est triangualire supérieure à coefficients diagonaux non-nuls. On calcule :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 28 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Les opérations $(L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$ puis $(L_1 \leftrightarrow L_3)$ et $(L_3 \leftarrow -L_3)$ donnent :

$$AB \quad \text{inversible} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 28 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{inversible}$$

Cette dernière matrice est inversible car elle est triangulaire à coefficients diagonaux non-nuls, donc la matrice AB est inversible.

Comme A est inversible alors A^{-1} est définie et elle est inversible.

On remarque que $B = A^{-1}(AB)$. Par produit la matrice B est inversible.

De plus $B^{-1} = (AB)^{-1}A$. Par l'algorithme du pivot de Gauss on obtient :

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -51 & 25 & 13 \\ 28 & -15 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En multipliant cette matrice par A :

$$B^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -51 & -128 & 113 \\ 28 & 69 & -60 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

15 Soit t un scalaire, et A la matrice de taille (n,n) de coefficients :

$$a_{ij} = \begin{cases} t & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

a. Démontrer qu'il existe deux scalaires α et β tels que $A^2 = \alpha I_n + \beta A$, et exprimer ces scalaires en fonction de t.

b. Déterminer pour quelles valeurs de t la matrice A est inversible, et calculer alors A^{-1}.

a. On calcule A_2. On remarque que tous ces coefficients diagonaux sont égaux à t^2+n-1 et tous ces coefficients non diagonaux sont égaux à $2t+n-2$.

Ainsi la matrice $A^2-(2t+n-2)A$ est diagonale, et on calcule que ses coefficients diagonaux sont égaux à $-t^2-(n-1)t+n-1$.

On en déduit : $A^2 = \alpha I_n + \beta A$ avec $\alpha = -t^2-(n-2)t+n-1$ et $\beta = 2t+n-2$.

b. On factorise : $\alpha = -(t-1)(t+n-1)$

Si α est non-nul, c'est-à-dire si t est différent de 1 et de $-(n-1)$, alors on peut écrire :

$$\frac{1}{\alpha}(A-\beta I_n)A = A \times \frac{1}{\alpha}(A-\beta I_n) = I_n$$

La matrice A est donc inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{\alpha}(A-\beta I_n)$.

Si α est nul, c'est-à-dire si $t=1$ ou $t=-(n-1)$ alors A n'est pas inversible.

On démontre ceci par l'absurde. Si α est nul alors $A^2 = \beta A$. Si A était inversible alors en multipliant par A^{-1} on obtiendrait $A = \beta I_n$, ce qui est faux car A n'est pas diagonale.

Finalement A est inversible si et seulement si t est différent de 1 et de $-(n-1)$.

17 Soit A une matrice carrée de taille (n,n).

On suppose que A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.

a. Justifier que A n'est pas inversible.

b. Démontrer que $I_n - A$ est inversible et donner son inverse.

a. On raisonne par l'absurde. Si A est inversible alors A^p est inversible, d'inverse $A^{-p} = (A^{-1})^p$. Mais alors $A^p \times A^{-p} = I_n$. Or $A^p = 0_n$ donc ceci est absurde.

Ainsi A n'est pas inversible.

b. Comme $A^p = 0_n$ alors $I_n - A^p = I_n$. Or :

$$I_n - A^p = I_n^p - A^p = (I_n - A)\sum_{k=0}^{n-1} A^k.$$

De même :

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right)(I_n - A) = I_n - A^p = I_n$$

Ceci montre que la matrice $I_n - A$ est inversible, d'inverse $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k$.

18 Déterminer si chacune des matrices suivantes est inversible, éventuellement en discutant selon son paramètre, et inverser celles qui sont inversibles.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2\lambda+1 & \lambda+1 \\ 2\lambda+2 & \lambda+2 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad A_8 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_9 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & \lambda \end{pmatrix} \qquad A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & a & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & \lambda^2 & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$A_1^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ $\qquad$ A_2 est inversible ssi $\lambda \neq \pm i$ et $A_2^{-1} = \dfrac{1}{1+\lambda^2}\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\qquad$ A_4 est inversible ssi $\lambda \neq 0$ et $A_4^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \lambda+2 & -\lambda-2 \\ -2\lambda-2 & 2\lambda+1 \end{pmatrix}$

$A_5^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_6^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -i & 2 \\ -i & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_7^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A_8^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 8 & -12 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ A_9 n'est pas inversible.

A_{10} est inversible ssi $\lambda \neq -1$ et dans ce cas $A_{10}^{-1} = \dfrac{1}{10(\lambda+1)}\begin{pmatrix} \lambda+4 & 2\lambda-2 & 5 \\ 5\lambda+8 & -4 & 5 \\ 6 & -8 & 10 \end{pmatrix}$

$A_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}-a & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -a \end{pmatrix}$

A_{12} est inversible ssi $\lambda \notin \mathbb{U}_3$ et dans ce cas $A_{12}^{-1} = \dfrac{1}{1-\lambda^3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

19 Démontrer qu'une matrice antisymétrique de taille $(3,3)$ n'est pas inversible.

Soit A une matrice antisymétrique de taille $(3,3)$. Ceci signifie qu'il existe trois réels a, b, c tels que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Si a est nul alors par opération élémentaire $(L_1 \leftrightarrow L_3)$, A est inversible si la matrice

$$\begin{pmatrix} -b & -c & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

est inversible. Celle-ci est triangulaire avec un coefficient diagonal nul, doncelle n'est pas inversible, et A n'est pas inversible.

Si maintenant $a \neq 0$ alors par opérations élémentaires on obtient successivement les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & c \\ 0 & a & b \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & -c & -\frac{bc}{a} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est triangulaire avec un coefficient diagonal nul, donc elle n'est pas inversible, et par équivalences A n'est pas inversible.

Finalement dans tous les cas A n'est pas inversible.

Autre méthode. On constate que

$$A \begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le sytème $AX = 0$ (avec 0 le vecteur colonne à trois lignes nul) admet donc au moins deux solutions $(0,0,0)$ et $(c,-b,a)$.

Si A est inversible alors il admet une et une seule solution, ce qui montre que $(c,-b,a) = (0,0,0)$ et donc $A = 0_3$. Il est alors impossible que A soit inversible, et cette contradiction montre que A n'est pas inversible.

20 Résoudre les systèmes suivants.

$$S_1 : \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x + 3y + 6z + 10t = 15 \\ x + 4y + 10z + 19t = 31 \end{cases}$$

Les réponses sont :

$\mathscr{S}_1 = \varnothing$ $\qquad$ $\mathscr{S}_2 = \{(8 - 3y - t, y, 2 - 2t, t, -3) \mid (y,t) \in \mathbb{R}^2\}$

$\mathscr{S}_3 = \{(3 - t, -8 + 3t, 6 - 3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

21 Résoudre les systèmes suivants, éventuellement en discutant selon la valeur des paramètres a, b, λ.

$$S_1 : \begin{cases} x + 2ay + z = 3 \\ y + az = 2 \\ x - z = -1 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x + 2y + az = b \end{cases}$$

$$\mathscr{S}_1 = \begin{cases} \left\{\frac{1}{a+1}(1-a, 2, 2)\right\} & \text{si } a \neq \pm 1 \\ \varnothing & \text{si } a = -1 \\ \{(-1+t, 2-t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

$$\mathscr{S}_2 = \begin{cases} \left\{\left(\frac{-b-2}{a+1}, \frac{-a+b+1}{a+1}, \frac{b+2}{a+1}\right)\right\} & \text{si } a \neq -1 \\ \varnothing & \text{si } a = -1 \text{ et } b \neq -2 \\ \{(-t, t-1, t) \mid t \in \mathbb{R}\} & \text{sinon} \end{cases}$$

22 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et A la matrice de taille (n, n) dont les coefficients sont définis par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 1 & \text{si } (i,j) = (n, 1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $B = I_n - A$.

a. Démontrer que B n'est pas inversible.

b. Démontrer que A est inversible et donner son inverse.

On résout facilement cet exercice grâce aux systèmes linéaires.

On note X et Y les vecteurs colonnes à n lignes dont les coefficients sont respectivement $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$.

a. Le système $BX = 0$ équivaut au système $AX = X$, qui donne $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
Donc le vecteur $X = (1 \dots 1)$ est solution du système $BX = 0$.
Celui-ci admet plus d'une solution donc il n'est pas de Cramer, et la matrice B n'est pas inversible.

b. On remarque que : $AX = Y \iff X = {}^tAY$
Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = {}^tA$.

23 Soit n un entier naturel non-nul et a un complexe. On note S_a le système :

$$\begin{cases} x_1 & - \ ax_2 & = 1 \\ x_2 & - \ ax_3 & = 1 \\ \vdots & \quad \vdots & \ \vdots \\ x_{n-1} & - \ ax_n & = 1 \\ x_n & - \ ax_1 & = 1 \end{cases}$$

a. À quelle condition ce système est-il de Cramer ?
b. Résoudre le système dans ce cas.
c. Dans le cas où le système n'est pas de Cramer, résoudre le système homogène associé, puis compléter la résolution.

a. On applique les opérations élémentaires $(L_n \leftarrow L_n + a^k L_k)$ pour k allant de 1 à $n-1$, ce qui revient à l'opération :

$$(L_n \leftarrow L_n + \sum_{k=1}^{n-1} a^k L_k)$$

Elle donne $L_n : (1 - a^n)x_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k$, et le système obtenu est échelonné.
Ce système est de Cramer si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non-nuls, donc si et seulement si $a \notin \mathbb{U}_n$.

b. Supposons que $a \notin \mathbb{U}_n$. Alors $a \neq 1$ donc la dernière ligne est $L_n : (1 - a^n)x_n = \frac{a^n - 1}{a - 1}$.
On en déduit $x_n = \frac{1}{1-a}$, puis on obtient $x_{n-1} = \frac{1}{1-a}$, etc.
Finalement la solution est $\frac{1}{1-a}(1, \dots, 1)$, ce qui est vite vérifié.

c. Supposons que $a \in \mathbb{U}_n$.
Les solutions du système homogène associé sont les $\lambda(a^{n-1}, a^{n-2}, \dots, a, 1)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.
Si $a = 1$ la dernière ligne est $L_n : 0 = n$. Le système n'admet pas de solution.
Si $a \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ alors la dernière ligne est $L_n : 0 = 0$, donc le système admet une infinité de solutions.
On remarque $\frac{1}{1-a}(1, \dots, 1)$ est solution particulière, donc l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ \frac{1}{1-a}(1, \dots, 1) + \lambda(a^{n-1}, a^{n-2}, \dots, a, 1) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$