

TD. B14
Fractions rationnelles

Exercices de cours

① Donner une forme irréductible des fractions rationnelles suivantes.

$$F_1 = \frac{X^3 - 2X^2 - 9}{X^2 + 2X - 15} \qquad F_2 = \frac{X^2 - 1}{X^3 - 1}$$

$$F_3 = \frac{X^4 + 1}{X^2 + 1} \qquad F_4 = \frac{3X^3 + X^2 - 2X - 2}{2X^3 + 2X^2 - 3X - 1}$$

② Déterminer les parties entières de :

$$F_1 = \frac{X^2 + 1}{X + 1} \qquad F_2 = \frac{X^5 - X^2}{X^2 + X + 1}$$

$$F_3 = \frac{X^4 - 5X^3 - 9X + 3}{X^2 - 2X + 2}$$

$$F_4 = \frac{X^n}{X - a} \qquad F_5 = \frac{X^{15}}{(X^2 + 3X + 2)^7}$$

③ Quelles fractions rationnelles sont égales à leur partie entière ?

④ Énoncer et démontrer les formules pour $\deg(F + G)$ et $\deg(FG)$.

⑤ Quelle est la partie entière d'une fraction rationnelle de degré nul ?

⑥ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}$ les éléments de \mathbb{U}_n .

a. Démontrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ il existe $\lambda_k \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X - \zeta_k}$$

b. Soit $Q = X^n - 1$ et, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$: $Q_k = \frac{Q}{X - \zeta_k}$. Démontrer que $\lambda_k = \frac{1}{Q'(\zeta_k)}$ et en déduire la décomposition de $\frac{1}{X^n - 1}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

⑦ Décomposer en éléments simples :

$$F_1 = \frac{3X + 7}{(X + 4)^2} \qquad F_2 = \frac{X^3 - 3X + 1}{(X + 1)^4}$$

$$F_3 = \frac{X^n}{(X - 1)^{n+1}}$$

⑧ Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F = \frac{(X + 1)^3}{(X^2 + 1)^2}$$

⑨ Décomposer en éléments simples :

$$F_1 = \frac{1}{X^3 - 3X + 2} \qquad F_2 = \frac{X^4 + 2X^3}{(X^2 - 1)^2}$$

⑩ Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

a. Soit u_1, \dots, u_n des fonctions dérivables.

Donner une formule pour $(u_1 \dots u_n)'$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

b. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines complexes de P , m_1, \dots, m_n leurs multiplicités.

Donner une expression de $\frac{P'}{P}$, en déduire sa décomposition en éléments simples.

c. On suppose que les α_i sont réels.

Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{P'(x)}{P(x)}$ et retrouver le résultat précédent.

⑪ Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F_1 = \frac{X}{X^4 - 1} \qquad F_2 = \frac{X^5}{(X^2 + 1)^2}$$

⑫ Décomposer en éléments simples en spécialisant :

$$F = \frac{(X - 1)(X - 3)}{(X - 2)(X - 4)}$$

⑬ Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F = \frac{X^3}{(X^2 + 1)(X^2 + 2)}$$

a. en utilisant les complexes,

b. en utilisant la parité.

⑭ Déterminer une primitive sur \mathbb{R}^* de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^3(x + 1)}$$

⑮ Déterminer une primitive sur \mathbb{R}^* de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 + 2x + 2}$$

en partant de la forme désirée.

16 Déterminer une primitive sur l'intervalle $] -1, 1[$ de la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{1 - x^4}$$

17 Soit $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$.

Déterminer une primitive de f :

- a. en utilisant les complexes,
- b. grâce à un changement de variable.

18 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in] -\infty, 1[$ on définit :

$$f_k(x) = \frac{x^k}{x^3 - 1} \quad \text{et} \quad F_k(x) = \int_0^x f_k(t) dt$$

- a. Calculer F_2 puis $F_2 + F_1 + F_0$ et enfin $F_1 - F_0$.
- b. En déduire la décomposition de $\frac{1}{x^3 - 1}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

19 Calculer la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{4n^2 + 8n + 3} \quad \sum_{n \geq 2} \frac{n}{(n^2 - 1)^2}$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n - 10}{n^3 + 7n^2 + 10n}$$

1 Soit E l'application de $\mathbb{K}(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$ qui à une fraction rationnelle associe sa partie entière.

- a. Démontrer que E est linéaire.
- b. Déterminer le noyau et l'image de E .
- c. Démontrer que ceux-ci sont supplémentaires.

2 Calculer les dérivées successives de :

- a. $f(x) = \frac{1}{(x - a)(x - b)}$ avec $a \neq b$
- b. $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 9}$
- c. $f(x) = \arctan x$

Retrouver grâce à la dernière le développement limité de \arctan en 0.

3 Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-2}^0 \frac{t + 4}{t^2 + 4t + 6} dt \quad I_2 = \int_3^4 \frac{t^2 + 5t + 7}{t^2 - 5t + 7} dt$$

$$I_3 = \int_0^6 \frac{t^2}{(t + 2)(t + 3)(t + 4)} dt$$

$$I_4 = \int_0^2 \frac{t}{t^3 - 2t + 4} dt \quad I_5 = \int_0^1 \frac{t^3}{(t^2 - 4)^3} dt$$

TD B14. Fractions rationnelles

Réponses

Exercices de cours

①

$$F_1 = \frac{X^2 + X + 3}{X + 5} \quad F_2 = \frac{X + 1}{X^2 + X + 1}$$

$$F_3 = \frac{X^4 + 1}{X^2 + 1} \quad F_4 = \frac{3X^2 + 4X + 2}{2X^2 + 4X + 1}$$

②

$$F_1 = X - 1 + \frac{2}{X + 1}$$

$$F_2 = X^3 - X^2$$

$$F_3 = X^2 - 3X - 8 - \frac{19(X - 1)}{X^2 - 2X + 2}$$

$$F_4 = X^{n-1} + aX^{n-2} + \dots + a^{n-1} + \frac{a^n}{X - a}$$

$$F_5 = X - 21 + \frac{P}{(X^2 + 3X + 2)^7}$$

⑥

$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{\zeta \in U_n} \frac{\zeta}{n(X - \zeta)}$$

⑦

$$F_1 = \frac{3}{X + 4} - \frac{5}{(X + 4)^2}$$

$$F_2 = \frac{1}{(X + 1)} - \frac{3}{(X + 1)^2} + \frac{3}{(X + 1)^4}$$

$$F_3 = \sum_{i=1}^n \frac{\binom{n}{i-1}}{(X - 1)^i}$$

Pour la dernière, utiliser la formule de Taylor ou la formule du binôme.

⑧

$$F = \frac{X + 3}{X^2 + 1} + \frac{2X - 2}{(X^2 + 1)^2}$$

⑨

$$F_1 = \frac{1}{(X - 1)^2(X + 2)}$$

$$= \frac{1}{9(X + 2)} + \frac{1}{9(X - 1)} + \frac{1}{3(X - 1)^2}$$

Pour trouver le coefficient de $\frac{1}{(X-1)}$ on peut trouver celui de $\frac{1}{(X-1)^2}$ et retrancher cette partie.

On peut aussi spécialiser en une valeur quelconque.

$$F_2 = 1 + \frac{2X^3 + 2X^2 - 1}{(X - 1)^2(X + 1)^2}$$

$$= 1 + \frac{3}{4(X - 1)^2} + \frac{7}{4(X - 1)}$$

$$- \frac{1}{4(X + 1)^2} + \frac{1}{4(X + 1)}$$

⑩

a. $(u_1 \dots u_n)' = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n u_k \right) u_i' = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{i=1}^n u_k \right) \frac{u_i'}{u_i}$

b. $P = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)^{m_i}$

$$P' = \lambda \sum_{i=1}^n \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (X - \alpha_k)^{m_k} \right) m_i (X - \alpha_i)^{m_i - 1}$$

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{X - \alpha_i}$$

c. $\int \frac{P'}{P} = \ln |P| = \ln |\lambda| + \sum_{i=1}^n m_i \ln |x - \alpha_i|$

D'où en dérivant le même résultat.

⑪

$$F_1 = \frac{1}{4(X - 1)} + \frac{1}{4(X + 1)} - \frac{X}{2(X^2 + 1)}$$

On peut soustraire les parties composées des pôles simples, ou passer par les complexes.

$$F_2 = X - \frac{2X^3 + X}{(X^2 + 1)^2} = X - \frac{2X}{X^2 + 1} + \frac{X}{(X^2 + 1)^2}$$

⑫

$$F = 1 + \frac{1}{2(X-2)} + \frac{3}{2(X-4)}$$

On écrit $F = \lambda + \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X-4}$.

La limite en $+\infty$ donne $\lambda = 1$.

La spécialisation en 1 et en 3 donne $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{3}{2}$

⑬

a. On écrit :

$$F = \frac{\alpha}{X - i} + \frac{\alpha'}{X + i} + \frac{\beta}{X - i\sqrt{2}} + \frac{\beta'}{X + i\sqrt{2}}$$

Par conjugaison $\alpha' = \bar{\alpha}$ et $\beta' = \bar{\beta}$.

On obtient $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = 1$ donc :

$$F = \frac{2X}{X^2 + 2} - \frac{X}{X^2 + 1}$$

b. On écrit :

$$F = \frac{aX + b}{X^2 + 1} + \frac{cX + d}{X^2 + 2}$$

Comme F est impaire alors $b = d = 0$, par unicité.

On en déduit :

$$\frac{X^2}{(X^2 + 1)(X^2 + 2)} = \frac{a}{X^2 + 1} + \frac{c}{X^2 + 2}$$

On pose $Y = X^2$ et on obtient $a = -1$ et $c = 2$.

14 On obtient :

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

Donc :

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right|$$

15 On doit avoir :

$$f(x) = ax + b + c \frac{2x+2}{x^2+2x+2} + d \frac{1}{x^2+2x+2}$$

Donc $(ax+b)(x^2+2x+2) + 2cx + 2c + d = x^3$

Successivement $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$ et $d = 2$.

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x^2+2x+2) + 2 \arctan(x+1)$$

16 On obtient :

$$f(x) = \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}$$

Puis :

$$F(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x$$

On peut vérifier le développement en éléments simples avec les développements limités.

17

$$\begin{aligned} \text{a. } f(x) &= \frac{1}{4i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(x-i)^2} + \frac{1}{(x+i)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(x-i)^2} + \frac{1}{(x+i)^2} \right) \\ F(x) &= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1} \right) \end{aligned}$$

b. Poser $t = \tan u$.

18

$$\begin{aligned} \text{a. } F_2(x) &= \frac{1}{3} \ln(1-x^3) \\ F_2(x) + F_1(x) + F_0(x) &= \ln(1-x) \\ f_1(x) - f_0(x) &= \frac{1}{x^2+x+1} \\ F_1(x) - F_0(x) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } F_0 &= \frac{1}{2}(F_0 + F_1 + F_2) - \frac{1}{2}(F_1 - F_0) - \frac{1}{2}F_2 \\ \text{avec } F_2(x) &= \frac{1}{3} \ln(1-x) + \frac{1}{3} \ln(x^2+x+1) \end{aligned}$$

$$f_0(x) = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$$

$$\begin{aligned} \text{19 } S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{4n^2+8n+3} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+3} \right) \rightarrow \frac{1}{2} \\ S_n &= \sum_{k=2}^n \frac{k}{(k^2-1)^2} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \rightarrow \frac{5}{16} \\ S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+2} + \frac{1}{k+5} \right) \\ &= -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \\ &\quad - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \rightarrow -\frac{43}{60} \end{aligned}$$

Travaux dirigés

1 Si $\deg F_1 < 0$ et $\deg F_2 < 0$ alors :

$$\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg F_1, \deg F_2) < 0$$

Le noyau est l'ensemble $\mathbb{K}_-(X)$ des fractions rationnelles de degrés strictement négatifs.

L'image est $\mathbb{K}[X]$.

2

$$\begin{aligned} \text{a. } f^{(n)}(x) &= \frac{n!}{a-b} \left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x-b)^{n+1}} \right) \\ \text{b. } f^{(n)}(x) &= n! \left(\frac{1}{(x-3)^{n+1}} + \frac{1}{(x+3)^{n+1}} \right) \\ \text{c. } f^{(n)}(x) &= \frac{(n-1)!}{2i} \left(\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n} \right) \end{aligned}$$

On obtient :

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ (n-1)!(-1)^k & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\text{3 } I_1 = \frac{\ln 3}{2} + \sqrt{2} \arctan \sqrt{2}$$

$$I_2 = 1 + 5 \ln 3 + \frac{25\pi}{3\sqrt{3}} \quad I_3 = 8 \ln 5 - 9 \ln 3 - 4 \ln 2$$

$$I_4 = \frac{\pi - \ln 2}{5} \quad I_5 = -\frac{1}{144}$$