

Proposition

- $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .
- $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif.

Démonstration. L'addition des fractions rationnelles est une loi de composition interne :

$$\forall (P_1, P_2, Q_1, Q_2) \in (\mathbb{K}[X])^2 \times (\mathbb{K}[X]^*)^2 \quad \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2} \in \mathbb{K}(X)$$

Elle est commutative et associative. Elle admet un élément neutre, et tout élément possède un opposé.

Le couple $(\mathbb{K}(X), +)$ est donc un groupe abélien.

- La multiplication par un scalaire est une loi externe $\mathbb{K} \times \mathbb{K}(X) \rightarrow \mathbb{K}(X)$ définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^* \quad \lambda \cdot \frac{P}{Q} = \frac{\lambda P}{Q}$$

Elle vérifie les axiomes d'un espace vectoriel :

$$\begin{aligned} \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall (P, P_1, P_2) \in \mathbb{K}[X]^3 \quad \forall (Q, Q_1, Q_2) \in (\mathbb{K}[X]^*)^3 \\ (\lambda\mu) \frac{P}{Q} = \lambda \left(\mu \frac{P}{Q} \right) \quad 1 \cdot \frac{P}{Q} = \frac{P}{Q} \\ (\lambda + \mu) \frac{P}{Q} = \lambda \frac{P}{Q} + \mu \frac{P}{Q} \quad \lambda \left(\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} \right) = \lambda \frac{P_1}{Q_1} + \lambda \frac{P_2}{Q_2} \end{aligned}$$

Le triplet $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ est donc un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

- La loi \times est une loi de composition interne :

$$\forall (P_1, P_2, Q_1, Q_2) \in (\mathbb{K}[X])^2 \times (\mathbb{K}[X]^*)^2 \quad \frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2} \in \mathbb{K}(X)$$

Elle est commutative et associative. Elle admet un élément neutre. Elle est distributive par rapport à la loi $+$.

Ainsi le triplet $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un anneau commutatif.

Tout élément non-nul de $\mathbb{K}(X)$ est inversible, c'est-à-dire possède un inverse dans $\mathbb{K}(X)$.
Donc le triplet $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif. \square

B. Forme irréductible, partie entière**Rappels.**

- Lemme de Gauss : Soit A, B, C trois polynômes. Si A est premier avec B et A divise BC alors A divise C .
- Soit P et Q deux polynômes non-nuls.

Un PGCD de P et Q est un polynôme de degré maximal divisant P et Q .

Le PGCD de P et Q est le polynôme unitaire de degré maximal divisant P et Q .

Il est noté $P \wedge Q$.

- Deux polynômes P et Q sont *associés* s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda Q$.
Ceci a lieu si et seulement si $P \mid Q$ et $Q \mid P$.

D. Racines et pôles

Définitions

Soit F une fraction rationnelle, de forme irréductible $F = \frac{P}{Q}$.

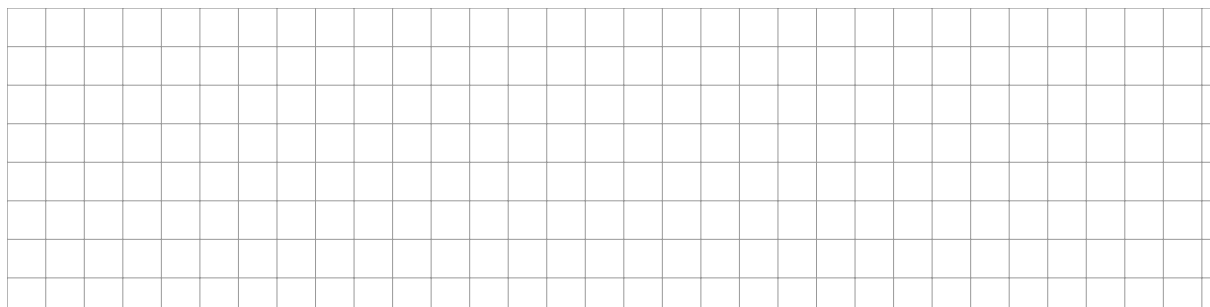
- Les *racines* ou *zéros* de F sont les racines de P .
- Les *pôles* de F sont les racines de Q .
- L'ordre de multiplicité d'une racine de F est son ordre de multiplicité en tant que racine de P .
- L'ordre de multiplicité d'un pôle de F est son ordre de multiplicité en tant que racine de Q .

Remarque. Si $F = \frac{P_1}{Q_1}$ et $F = \frac{P_2}{Q_2}$ sont deux formes irréductibles de F alors P_1 et P_2 sont associés, de même que Q_1 et Q_2 .

Les racines de P_1 sont donc celles de P_2 , avec les mêmes ordres de multiplicité, et de même pour Q_1 et Q_2 .

La définition des racines et pôles de F ainsi que celle de leurs ordres de multiplicité est donc correcte, elle ne dépend pas du choix du représentant irréductible de F .

Exemple. Soit $F = \frac{X^4(X-3)(X-2)^3}{(X^2-4)^7}$



Définition

Soit F une fraction rationnelle, \mathcal{P} l'ensemble de ses pôles, et $\mathcal{D} = \mathbb{K} \setminus \mathcal{P}$.

La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto F(x) \end{aligned}$$

est appelée *fonction rationnelle*.

II. Interpolation de Lagrange

A. Théorème et définitions

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des scalaires distincts, β_0, \dots, β_n des scalaires.
Alors il existe un et un seul polynôme P de degré au plus n tel que :

$$\forall i = 0, \dots, n \quad P(\alpha_i) = \beta_i \quad (\star)$$

Remarque. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ les données de l'énoncé correspondent à un ensemble de $(n + 1)$ points M_0, \dots, M_n d'abscisses distinctes.

Le théorème signifie qu'il existe une et une seule courbe polynomiale de degré au plus n passant par ces $(n + 1)$ points.

Démonstration. On définit l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

Les composantes de Φ sont les spécialisations $P \mapsto P(\alpha_i)$, donc elles sont linéaires, et ainsi Φ est linéaire.

Le noyau de Φ est l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}_n[X]$ tels que $P(\alpha_0) = \dots = P(\alpha_n) = 0$, c'est-à-dire dont les α_i sont racines.

Or un polynôme non-nul de degré au plus n ne peut avoir $n + 1$ racines, donc le noyau de Φ est réduit au vecteur nul : $\ker \Phi = \{0\}$

Ceci implique que Φ est injective. Or $\mathbb{K}_n[X]$ et \mathbb{K}^{n+1} sont tous les deux de dimension $n + 1$. Par corollaire du théorème du rang Φ est bijective.

Le vecteur $(\beta_0, \dots, \beta_n)$ appartient à \mathbb{K}^{n+1} , donc il admet un et un seul antécédent par Φ , ce qui démontre le théorème. \square

Remarque. On peut expliciter le polynôme P dont l'existence et l'unicité sont affirmées par le théorème.

Pour ceci on cherche des antécédents des vecteurs de la base canonique de \mathbb{K}^{n+1} .

On note $\mathcal{C} = (e_0, \dots, e_n)$ cette base canonique.

Soit $L_i = \Phi^{-1}(e_i)$, pour tout $i = 0, \dots, n$. Alors tous les α_k sauf α_i sont racines de L_i , donc L_i est de la forme :

$$L_i = \lambda(X - \alpha_0) \cdots (X - \alpha_{i-1})(X - \alpha_{i+1}) \cdots (X - \alpha_n) = \lambda \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} (X - \alpha_k)$$

Comme L_i est de degré au plus n alors λ est un scalaire. Comme $\Phi(L_i) = e_i$ alors $L_i(\alpha_i) = 1$, ce qui montre que :

$$\lambda = \frac{1}{(\alpha_i - \alpha_0) \cdots (\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1}) \cdots (\alpha_i - \alpha_n)}$$

Définition

On note $T = (X - \alpha_0) \dots (X - \alpha_n)$ puis :

$$\forall i = 0, \dots, n \quad P_i = \frac{T}{(X - \alpha_i)}$$

et enfin :

$$\forall i = 0, \dots, n \quad L_i = \frac{P_i}{P_i(\alpha_i)}$$

Les polynômes L_0, \dots, L_n sont appelés *polynômes d'interpolations de Lagrange* aux points $\alpha_0, \dots, \alpha_n$.

Théorème (suite)

Le polynôme P de degré au plus n vérifiant les conditions (\star) est :

$$P = \beta_0 L_0 + \dots + \beta_n L_n = \sum_{i=0}^n \beta_i L_i$$

Démonstration. On a vu que les L_i sont antécédents des vecteurs e_i de la base canonique de \mathbb{K}^{n+1} . On en déduit par linéarité de Φ :

$$\begin{aligned} \Phi(P) &= \Phi(\beta_0 L_0 + \dots + \beta_n L_n) = \beta_0 \Phi(L_0) + \dots + \beta_n \Phi(L_n) \\ &= \beta_0 e_0 + \dots + \beta_n e_n = (\beta_0, \dots, \beta_n) \end{aligned}$$

Ceci montre que P est l'antécédent de $(\beta_0, \dots, \beta_n)$ par Φ . □

Proposition

On note P_0 le polynôme de degré au plus n vérifiant les conditions (\star) .

Soit $T = (X - \alpha_0) \dots (X - \alpha_n)$.

Alors les polynômes vérifiant les conditions (\star) sont les polynômes $P_0 + AT$ où $A \in \mathbb{K}[X]$.

Il s'agit d'un sous-espace affine de $\mathbb{K}[X]$, de direction $T\mathbb{K}[X]$ (l'ensemble des multiples de T) et dont P_0 est le seul élément de degré strictement inférieur à $n + 1$.

Démonstration. En effet, un polynôme P vérifie les conditions (\star) si et seulement si le polynôme $P - P_0$ s'annule en tous les points $\alpha_0, \dots, \alpha_n$, donc si et seulement si le polynôme $P - P_0$ est multiple de T . □

B. Propriétés supplémentaires

1. Matrice de Vandermonde

Proposition

La matrice de Φ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}_n[X]$ et \mathbb{K}^{n+1} est :



Son déterminant est appelé *déterminant de Vandermonde*, il satisfait :

$$\det A = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Il est donc non-nul si et seulement si les α_i sont distincts.

Démonstration. Voir exercice 15 de la feuille de T.D. B13. □

Remarque. On peut expliciter la matrice inverse de A de la façon suivante.

La famille (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ car c'est l'image réciproque de la base canonique \mathcal{C} de \mathbb{K}^{n+1} par l'isomorphisme Φ . On note $\mathcal{B} = (L_0, \dots, L_n)$ cette base.

Soit \mathcal{B}_0 la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, et P la matrice de passage de \mathcal{B}_0 à \mathcal{B} . Il s'agit de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des polynômes L_i dans la base canonique.

Alors $P = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}_0}(\text{Id}_{\mathbb{K}_n[X]})$ et $A = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\Phi)$, donc :

$$AP = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\Phi \circ \text{Id}_{\mathbb{K}_n[X]}) = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\Phi) = I_{n+1}$$

En effet, comme $\Phi(L_i) = e_i$ pour tout $i = 0, \dots, n$ alors la matrice de Φ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} est l'identité.

Les matrices étant carrées, on en déduit que P est la matrice inverse de A .

2. Orthogonalité

Rappel. Les α_k étant distincts, l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire :

$$\forall (P, Q) \in E^2 \quad (P | Q) = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k)Q(\alpha_k)$$

Exemples.

$\frac{X+1}{X(X+2)}$	=	
$\frac{X^2+2X+13}{(X^2-1)(X+3)}$	=	
$\frac{1}{(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)}$	=	

Démonstration. On reprend les polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$T = \prod_{k=0}^n (X - \alpha_k) \quad \text{et} \quad \forall i = 0, \dots, n \quad P_i = \frac{T}{(X - \alpha_i)} \quad \text{puis} \quad L_i = \frac{P_i}{P_i(\alpha_i)}$$

On a alors l'équivalence :

$$\frac{P}{(X - \alpha_0) \cdots (X - \alpha_n)} = \frac{\lambda_0}{X - \alpha_0} + \cdots + \frac{\lambda_n}{X - \alpha_n} \quad (**)$$

$$\iff P = \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n$$

On sait que la famille (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Comme les α_k sont distincts alors les $P_i(\alpha_i)$ sont non-nuls, donc la famille (P_0, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Tout polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ admet donc un unique n -uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ de coordonnées dans cette base, ce qui démontre le théorème. \square

Remarque. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ fixé. Alors en multipliant $(**)$ par $(X - \alpha_i)$:

$$\frac{P}{P_i} = \lambda_i + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \lambda_k \frac{X - \alpha_i}{X - \alpha_k}$$

La fraction rationnelle $\frac{P}{P_i}$ n'admet pas α_i pour pôle, donc on peut la spécialiser en α_i , ce qui donne la valeur de λ_i .

Méthode

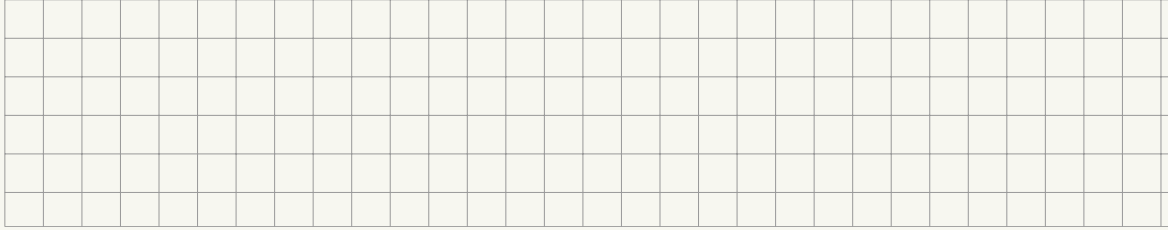
Supposons que $F = \frac{P}{Q}$ et α est un pôle simple de F .

Alors le coefficient λ de $\frac{1}{(X-\alpha)}$ dans la décomposition polaire de F est la spécialisation en α de $(X - \alpha)F$.

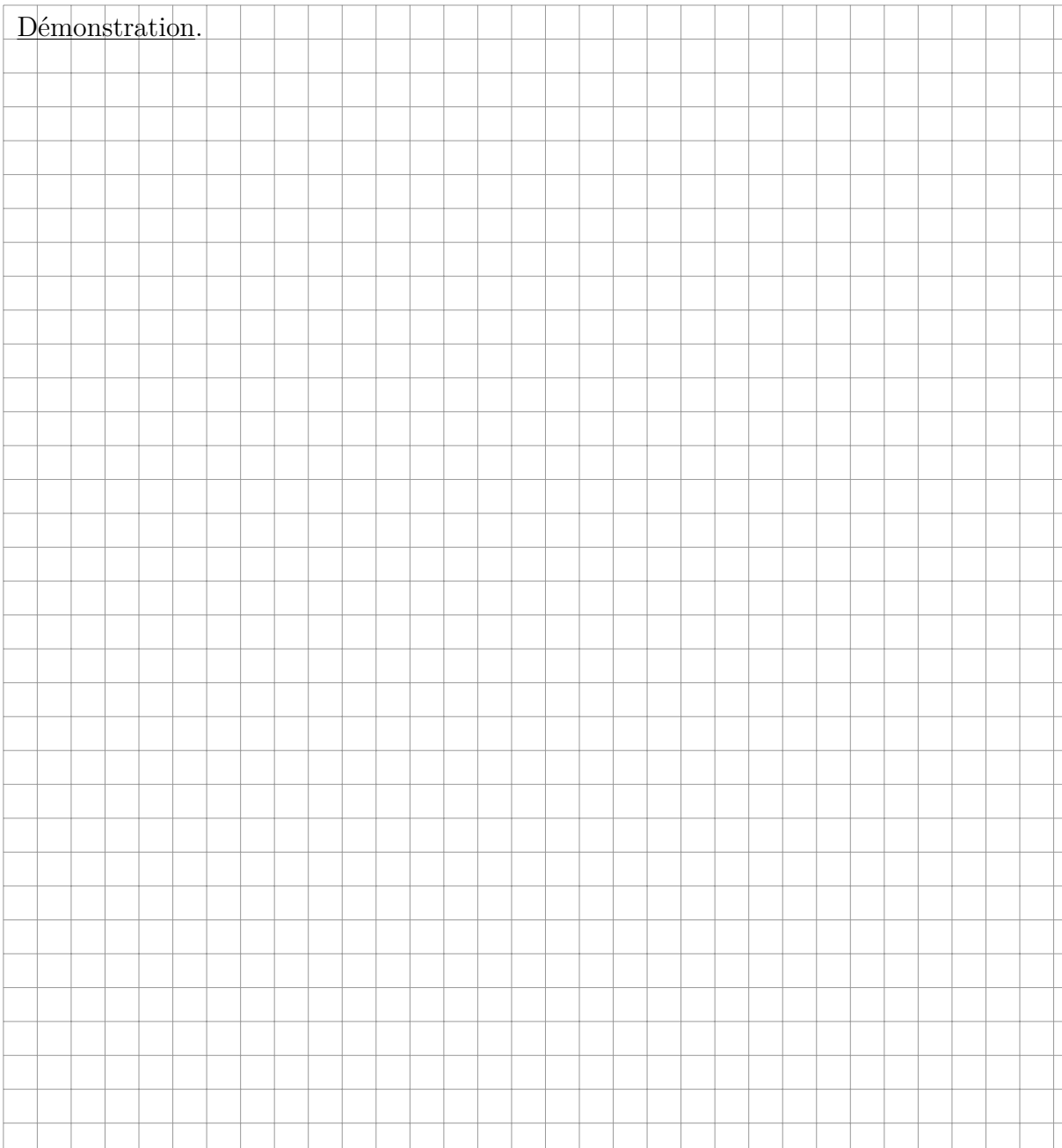
► Exercice 6.

Théorème 3

Soit Q_1 et Q_2 deux polynômes premiers entre eux, de degrés respectifs a et b strictement positifs. Alors pour tout polynôme P de degré strictement inférieur à $a + b$ il existe un unique couple de polynômes P_1 et P_2 de degrés respectifs strictement inférieurs à a et b tels que :



Démonstration.



Rappels.

- Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les $\lambda(X - \alpha)$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire les polynômes de degré 1.

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les $\lambda(X - \alpha)$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

- Tout polynôme se décompose en produit de polynômes irréductibles.

Cette décomposition est unique à l'ordre près si on suppose que les facteurs sont unitaires et on ajoute le coefficient dominant.

Théorème (décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$)

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. On suppose que la décomposition en produit de facteurs irréductibles de Q est :

$$Q = \lambda(X - \alpha_1)^{m_1} \cdots (X - \alpha_n)^{m_n}$$

où les α_i sont des scalaires distincts et les m_i des entiers strictement positifs.

Alors il existe une unique famille composée d'un polynôme A et de scalaires $\lambda_{i,k}$ telle que :

$$\frac{P}{Q} = A + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X - \alpha_i)^k}$$

Remarque. A est la partie entière de F .

► **Exercices 9, 10.****Théorème (décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$)**

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. On suppose que la décomposition en produit de facteurs irréductibles de Q dans $\mathbb{R}(X)$ est :

$$Q = \lambda(X - \alpha_1)^{m_1} \cdots (X - \alpha_n)^{m_n} \times Q_1^{p_1} \times \cdots \times Q_r^{p_r}$$

où les α_i sont des scalaires distincts, les m_i des entiers strictement positifs, les Q_j des polynômes irréductibles de degré 2, et les p_j des entiers strictement positifs.

Alors il existe une unique famille composée d'un polynôme A , et de scalaires $\lambda_{i,k}$, $\mu_{j,\ell}$ et $\nu_{j,\ell}$ telle que :

$$\frac{P}{Q} = A + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X - \alpha_i)^k} + \sum_{j=1}^r \sum_{\ell=1}^{p_j} \frac{\mu_{j,\ell} X + \nu_{j,\ell}}{Q_j^\ell}$$

Méthodes

Les techniques suivantes peuvent être efficaces :

- La spécialisation en un point quelconque, voire le passage à la limite.
- La conjugaison des complexes.
- La parité.

► **Exercices 11, 12, 13.**

B. Applications

Méthode

La décomposition en éléments simples permet d'intégrer les fractions rationnelles.

On commence par extraire la partie entière, puis on factorise le dénominateur.

Ne pas oublier que parfois on peut intégrer directement, en faisant apparaître des formes comme $\frac{u'}{u}$, $\frac{u'}{u^2}$, $\frac{u'}{1+u^2}$, etc.

Rappels. Pour tout réel α et entier $n > 1$:

$$\int \frac{dx}{x - \alpha} = \qquad \qquad \int \frac{dx}{(x - \alpha)^n} =$$

Pour tous réels a, b, c avec $a > 0$ et $b^2 - 4ac < 0$, pour tous réels β et $\delta \neq 0$:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \qquad \qquad \int \frac{dx}{(x - \beta)^2 + \delta^2} =$$

► Exercices 14, 15, 16, 17, 18, 19.

Méthode

La somme de certaines séries peuvent être calculées grâce à la décomposition en éléments simple, en utilisant un télescopage.

► Exercice 20.